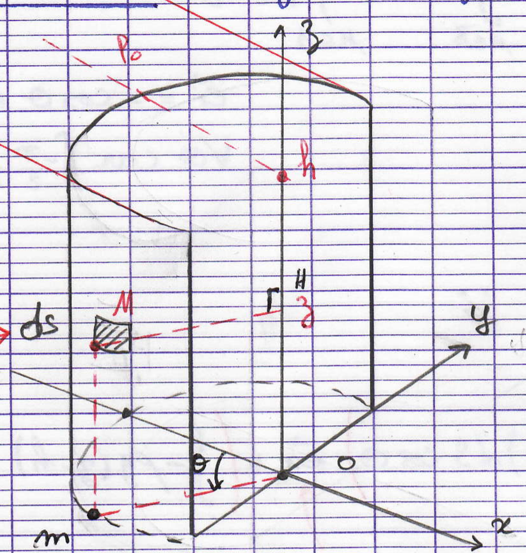
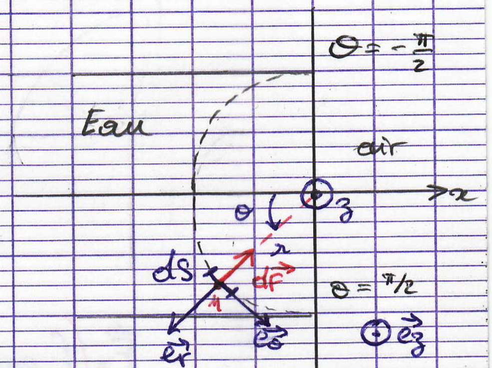
Ex T2-20 : barrage hémicylindrique

$0 < z < h$

Surface élémentaire définie autour de M
— à exprimer en base cylindrique car dS est une portion élémentaire d'1 cylindre





Base adaptée au plan : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\mathcal{S}$ = { surface dS élém. du barrage centrée en M, à l'altitude z } étudiée dans R_T gal.

Soumise aux forces pressantes dues à l'air et à l'eau :

$$\vec{dF} = \vec{df}_{eau \to dS} + \vec{df}_{air \to dS}$$
$$= P(z)\, dS(-\vec{e_r}) + P_0\, dS\, \vec{e_r}$$
$$\boxed{\vec{dF} = (P_0 - P)\, dS\, \vec{e_r}}$$

$\mathcal{S}'$ = { particule de fluide ds l'eau à l'altitude z }

→ RFSF : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ (car Oz ascendant)

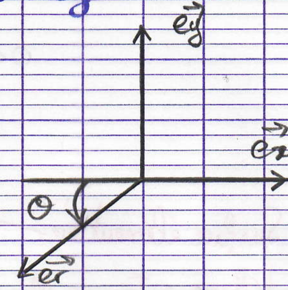
$$\to \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g \int_h^z dz$$ car ρ = cte (liquide)

$$P - P_0 = -\rho g (z - h)$$
$$\hookrightarrow P_0 - P = \rho g (z - h)$$
$$\hookrightarrow \vec{dF} = \rho g (z - h)\, dS\, \vec{e_r}$$

$$\hookrightarrow \vec{F} = \int_{M\in S} d\vec{F} = \int_{M\in S} \rho g (z-h)\, dS\, \vec{e_r}$$

$$\vec{e_r} = -\cos\theta\,\vec{e_x} - \sin\theta\,\vec{e_y}$$

$\forall\theta$ car $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$\vec{F} = \left(\int -\rho g(z-h)\, dS \cos\theta\right)\vec{e_x} + \left(\int -\rho g (z-h)\, dS \sin\theta\right)\vec{e_y}$$

$\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ sont deux vecteurs uniformes et constants

→ on peut les sortir des sommes

$$\vec{F} = F_x\,\vec{e_x} + F_y\,\vec{e_y}$$

$\boxed{\text{OR}}$ $\forall (M, d\vec{F}(M))$ $\exists (M', d\vec{F}(M'))$

tq $M' = sym(M)$

avec $d\vec{F}(M) + d\vec{F}(M') \parallel \vec{e_x}$

$\perp \vec{e_y}$ ‖ CCL : $\boxed{F_y = 0}$

il ne reste qu'à calculer F_x :

$$F_x = \int \rho g (h-z)\, \boxed{dS}\, \cos\theta$$

$$= \int \rho g (h-z)\, (dz.\, R\, d\theta) \cos\theta$$

$$= \rho g R \int_{\substack{0<z<h \\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}}} (h-z)\, dz\, \cos\theta\, d\theta$$

$$= \rho g R \left(\int_0^h (h-z)\, dz\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right)$$

T2-20 : suite

Rq E : dS est une surface, donc positive } $dS = \underbrace{dz}_{>0} \; \underbrace{R\,d\theta}_{>0} > 0$

pour avoir $dS>0$ il faut imposer $dz>0$ ET $d\theta>0$ ce qui impose les bornes des 2 intégrations

$0 \to z \to h$ $\quad$ $-\frac{\pi}{2} \to \theta \to \frac{\pi}{2}$

$\int_0^h \dots dz$ $\quad$ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots d\theta$

$$= \rho g R \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \left[\sin\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \rho g R \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) 2 = \rho g R h^2$$

$$\boxed{\vec{F} = \rho g R h^2 \, \vec{e_x}}$$

$$\vec{F}_{\substack{\text{barrage}\\ \text{plan}}} = \frac{1}{2} \rho g L h^2 \vec{e_x}$$

ces forces sont équivalentes.

$\boxed{R = \frac{L}{2}}$ $\quad$ $\boxed{L = 2R}$