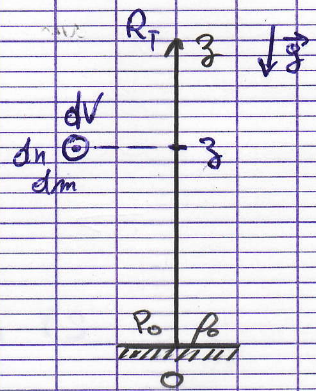
Ex T2-2 :

Σ : {particule de fluide d'un GP à z dans l'atmosphère}.



① RFSF : $\boxed{\dfrac{dP}{dz} = -\rho g}$

Oz ascendant

② éq° d'état pour un GP :

cf Ex T2.3 cours

$$P\,dV = dn\,RT$$

$$P = \rho \frac{RT}{M} \rightarrow \boxed{\rho = \frac{M}{RT} P} \quad (*)$$

②

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT} P} \quad (**)$$

1) $T = cte$ et uniforme $= T_0$ (atmosphère isotherme)

$$\rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} P$$

Méthode de la séparation des variables

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}\,dz$$

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT_0}\,dz$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{RT_0} z$$

$$\rightarrow \boxed{P = P_0 . \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)}$$

$z = 4807\,m$ (sommet du M^t Blanc)

$M = 29\,g.mol^{-1} = 29.10^{-3}\,kg.mol^{-1}$

⚠ Penser à convertir en unités SI avant de faire l'AN

T_0 en K

$$\boxed{P = 0,575\ bar}$$

erroné

↳ meilleur modèle : atmosphère polytropique

2) $T = T(z) = T_0 - Az$

$$\xrightarrow{**} \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg.P}{R(T_0 - Az)}$$

Rq : $T = T_0 - Az > 0$ ok

↳ par séparation des variables :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R(T_0 - Az)}\,dz$$

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{Mg}{R(T_0 - Az)}\,dz$$

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{R}\left[\frac{-1}{A}\ln(T_0 - Az)\right]_0^z$$

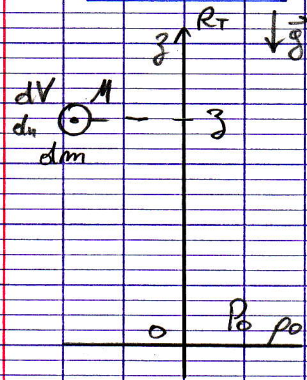
$$= \frac{Mg}{RA}\ln\left(\frac{T_0 - Az}{T_0}\right)$$

$$\ln\frac{P}{P_0} = \ln\left[\left(1 - \frac{Az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{RA}}\right]$$

$$\boxed{P = P_0\left(1 - \frac{Az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{RA}}}$$

$= 0,557\ bar$

Ex T2-3



$S = \{$particule de fluide assimilée à GP$\}$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{① RFSF} & \boxed{\dfrac{dP}{dz} = -\rho g} \\ \text{② éq° d'état :} & P.dV = dn RT \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$P = \frac{dn}{dV} RT$$

$$P = \frac{dm}{M} \frac{RT}{dV}$$

$$② \ \boxed{P = \rho \frac{RT}{M}} \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT} P$$

avec $g = g_0 \left(\dfrac{R_T}{R_T + z} \right)^2$

$$\frac{①}{②} \longrightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{M}{RT} g(z) . P$$

Séparation des variables P et z :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{M g_0}{R.T} \frac{R_T^{\,2}}{(R_T+z)^2} dz$$

$$\ln \frac{P}{P_0} \underset{\substack{\uparrow \\ T = cte}}{=} \frac{-M g_0 R_T^{\,2}}{R.T} \left[\frac{-1}{R_T + z} \right]_0^z$$

$$\boxed{\ln \frac{P}{P_0} = \frac{-M g_0 R_T^{\,2}}{R.T} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + z} \right)}$$