4) $V(M)$ ? $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}\, V$

$$E(r)\vec{e_r} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}} \\ \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}} \end{vmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})} = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$$

$$\frac{dV}{dr} = -E(r)$$

__1er cas:__ $r > R$ $\quad \frac{dV}{dr} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$

$\hookrightarrow V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} + V_1$

ici $\mathcal{D}$ est limitée

choix $V(+\infty) = \begin{cases} 0 \\ V_1 \end{cases}$ $\quad V_1 = 0$

$$\hookrightarrow \boxed{V(r > R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}}$$

__2e cas:__ $r < R$ $\quad \frac{dV}{dr} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} r$

$$V = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + V_2$$

Comme V est continu $V(R^+) = V(R^-)$

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + V_2 \quad \hookrightarrow V_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{V(r < R) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)}$$

Remarque : pour $r > R$

$$V(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \vec{e_r}$$

$\xrightarrow{\text{charge totale de } \mathcal{D}}$ $Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\boxed{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

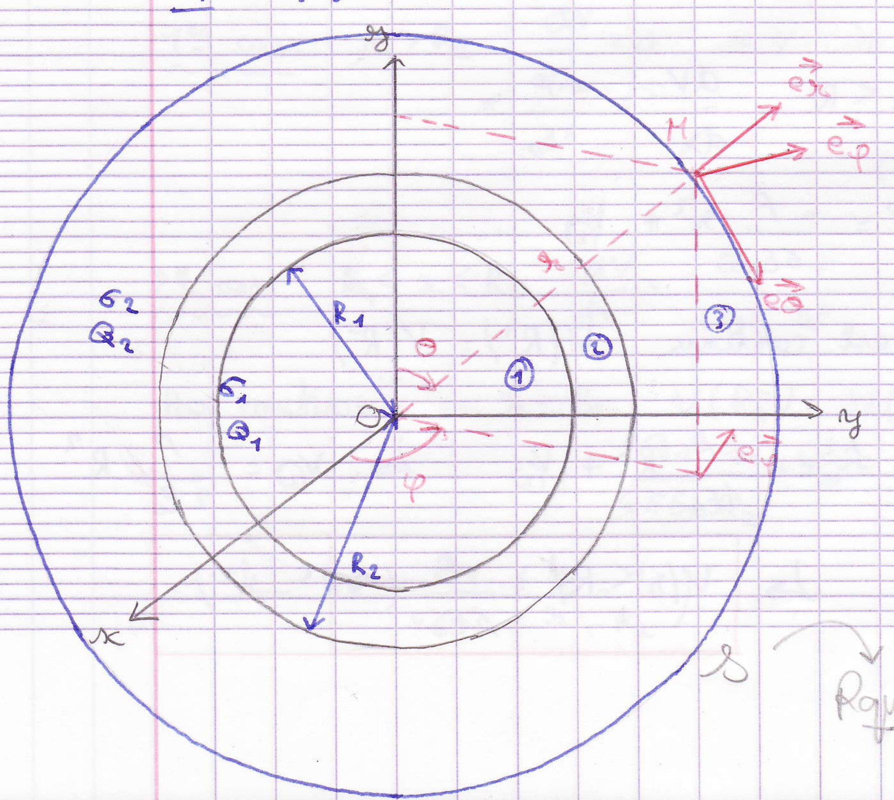
$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e_r}}$$

on retrouve que pour $\mathcal{D}$ limitée de charge totale $Q \neq 0$ de barycentre O alors $V_{ext}$ et $\vec{E}_{ext}$ sont les mêmes que le potentiel et le champ $\vec{E}$ créés par une charge ponctuelle Q qui serait placée en O dès lors que $\mathcal{D}$ est à symétrie sphérique.

## B. Cas d'une distribution surfacique

$\mathcal{D} \equiv$ 2 sphères concentriques $\{O, R_1\}$ et $\{O, R_2 > R_1\}$ chargées surfaciquement ($\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$) telles que les charges des sphères soient opposées $Q_1 = -Q_2$.

Q : $\vec{E}(M)$ $\forall M \in \mathcal{E}$ ?




$\underbrace{① \; ② \; ③}_{\text{cf a.}}$

(TG) ↓

$$\boxed{E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Rque la Sphère de Gauss véritable devrait être plus grande pour que M soit localisé sur sa surface.

1er cas : $r > R_2$ $\quad Q_{int} = Q_\infty = Q_1 + Q_2 = 0$

(TG) $\rightarrow$ $\boxed{E(r) = 0}$

2e cas : $R_1 < r < R_2$ $\quad Q_{int} = Q_1 = \sigma_1 \, 4\pi R_1^2$

(TG) $\rightarrow$ $E(r) \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \frac{R_1^2}{r^2}}$$

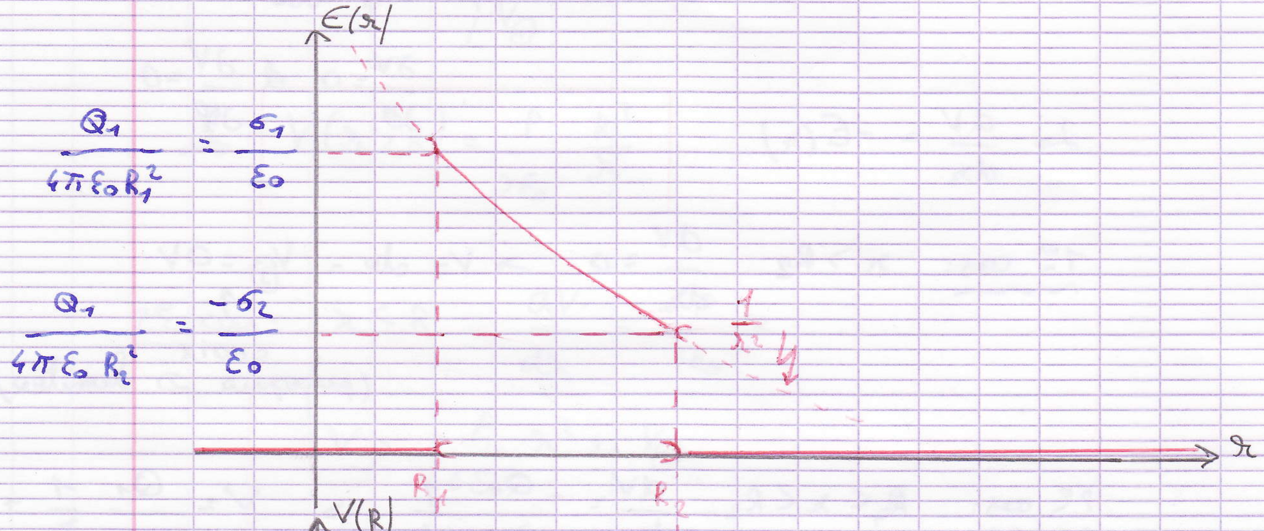
3e cas : $r < R_1$ $\quad Q_{int} = 0$

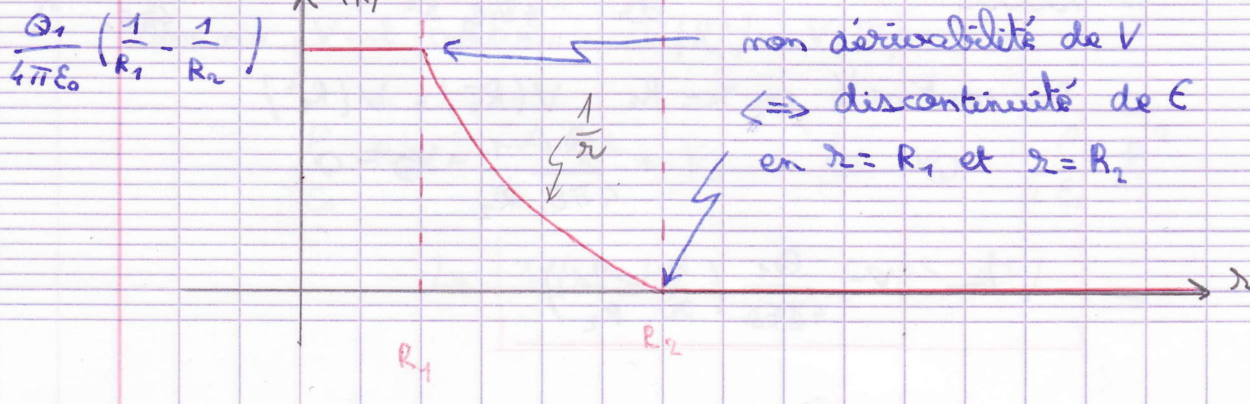
(TG) $\rightarrow$ $\boxed{E(r) = 0}$

cl : $\forall M \in \mathcal{E}$ si $r < R_1$ $\quad \vec{E}(M) = \vec{0}$

si $R_1 < r < R_2$ $\quad \vec{E}(M) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \vec{e_r} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \dfrac{R_1^2}{r^2} \vec{e_r}$

si $r > R_2$ $\quad \vec{E}(M) = \vec{0}$



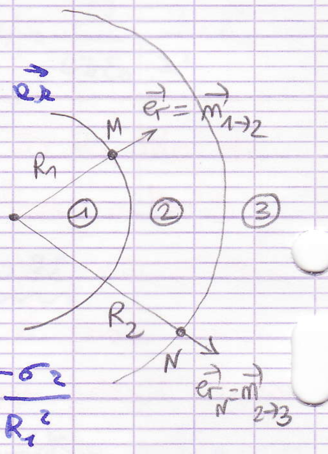
**Remarque :** • en $r = R_1$

$$\boxed{\vec{E}(R_1^+) - \vec{E}(R_1^-) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\vec{e_r} - \vec{0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}}$$

relation de passage OK !

• en $r = R_2$

$$\vec{E}(R_2^+) - \vec{E}(R_2^-) = \vec{0} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\vec{e_r} = \frac{-\sigma_1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{R_2^2}\vec{e_r}$$




$$= \frac{+\sigma_2}{\varepsilon_0}\vec{e_r}$$

$\downarrow$

$$Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2 = -Q_2 = -\sigma_2 4\pi R_2^2$$

$$\hookrightarrow \sigma_1 R_1^2 = -\sigma_2 R_2^2 \iff \frac{\sigma_1}{R_2^2} = \frac{-\sigma_2}{R_1^2}$$

d'où : $$\boxed{\vec{E}(R_2^+) - \vec{E}(R_2^-) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\vec{n}_{2\to 3}}$$

on vérifie bien la relation de passage

④ $V(M)$ ? $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}\, V$ $\quad E(r)\vec{e_r} = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$

$\uparrow$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{dV}{dr} = -E(r)$$

**1er cas :** $r > R_2$ $\quad \frac{dV}{dr} = 0 \quad \to V = \text{cte} = V_{③} = 0\,V$

$\uparrow$

CHOIX (puisque D limitée)

**2e cas :** $R_1 < r < R_2$ $\quad \frac{dV}{dr} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad \to \quad V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + V_{②}$

Par continuité en $r = R_2$ $\quad V(R_2^-) = V(R_2^+)$

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + V_{②} = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)}$$