

① Base adaptée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$
base sphérique

② $\vec{\omega}$ est invariant par rotation autour de Oz
 $\Rightarrow \forall M \in E: \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}(r, \theta)$ (*)

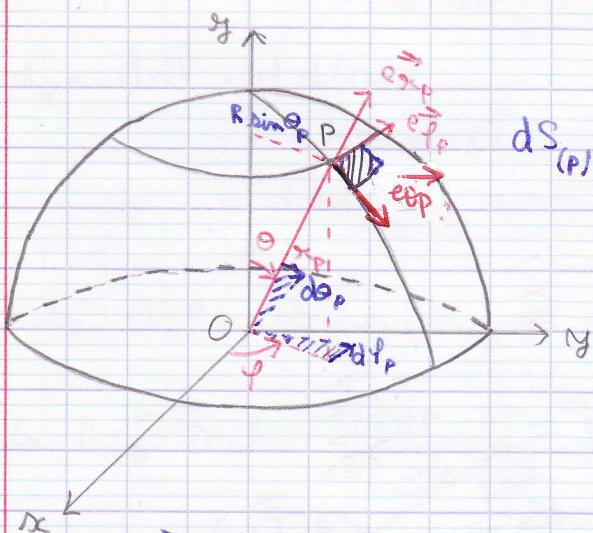
③ (ii): $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie des charges passant par M . $\Rightarrow \forall M \in E: \vec{E}(M) \subset (\pi)$
 $\hookrightarrow \vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r + E_\theta(M) \vec{e}_\theta$ (**)

d: (*) et (**) $\Rightarrow \forall M \in E: \vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$

④ Cas particulier $M=O$ tous les plans contenant Oz sont plans de symétrie de $\vec{\omega}$ passant par O
donc $E(O) \subset (Oz) \Rightarrow \vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_z$

\hookrightarrow On est ramené à chercher $E(O)$

$$\text{or } E(O) = \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z = \left(\int \frac{dq(P)}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{PO}}{PO^3} \right) \cdot \vec{e}_z \quad \text{avec } \begin{cases} \vec{PO} = -R \vec{e}_P \text{ et } PO^3 = R^3 \\ dq(P) = \sigma \cdot dS_{(P)} \\ = \sigma \cdot R^2 \cdot \sin\theta_P \cdot d\theta_P \cdot d\varphi_P \end{cases}$$



$$dS_{(P)} = (dl)_\theta \cdot (dl)_\phi$$

$$d\vec{OM} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } \vec{OM} = r \cdot \vec{e}_r$$

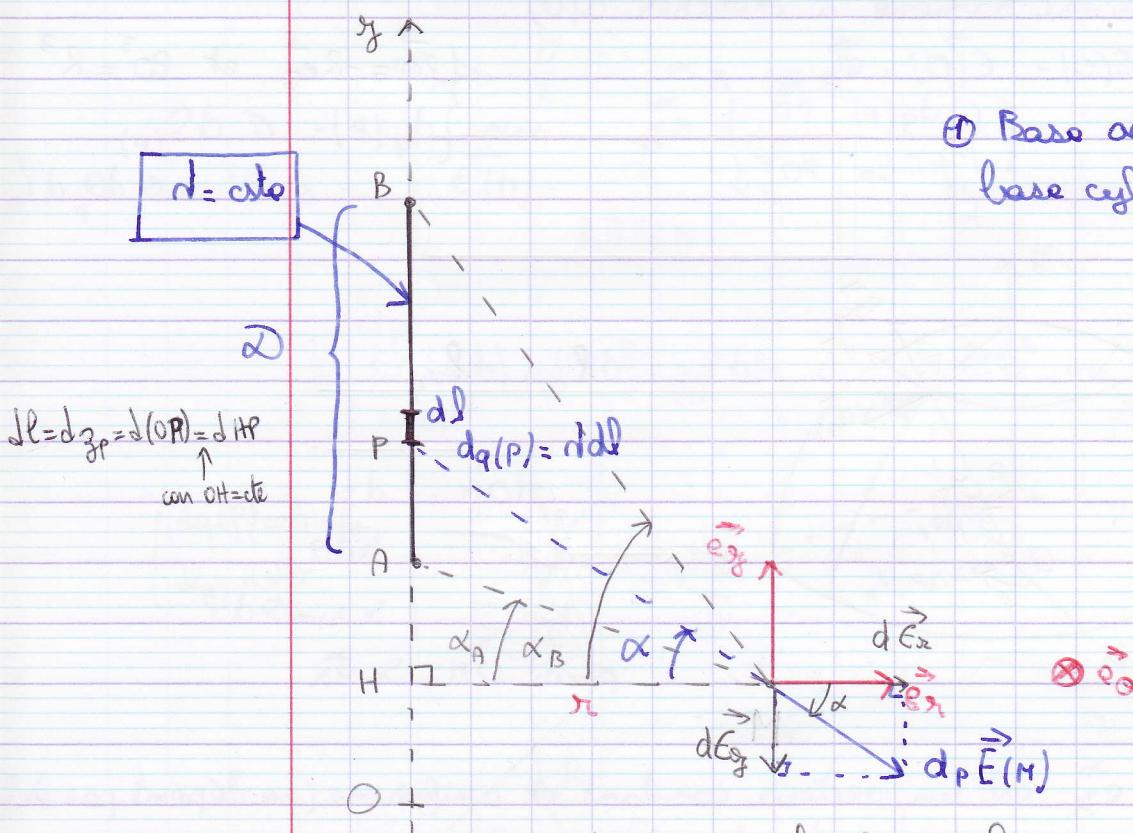
\vec{e}_z est un vecteur constant et uniforme (ne dépend pas de P)
 \hookrightarrow donc on peut le "rentrer" dans la somme.

$$\begin{aligned}
 E(0) &= \int \left(\frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-R \hat{e}_{\theta p}}{R^3} \cdot \hat{e}_y \right) \\
 &= \int \frac{-\sigma R^2 \sin\theta_p d\theta_p d\varphi_p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \underbrace{\cos\theta_p}_{d\sin\theta_p} \\
 &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta_p \cdot \cos\theta_p \cdot d\theta_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p \\
 &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sin^2\theta_p}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi \\
 E(0) &= -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \quad \text{d: } \boxed{E(0) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{e}_y} \quad \triangle \text{ vérifier l'orientation:}
 \end{aligned}$$

Rmq: $[\vec{E}] = \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right] = \left[\frac{\rho R}{\epsilon_0} \right] = \left[\frac{d}{\epsilon_0 R} \right]$

si $\sigma > 0$ alors $d_p \vec{E}(M)$ entrain selon $-\hat{e}_y$.

2) Segment uniformément chargé et modèle du fil infini



④ Base adaptée :
base cylindrique ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$)

Schema dans le plan de la page

② Invariances de \mathcal{D} : \forall rotation autour de Oz

$$\hookrightarrow \forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{E}(M) = \vec{E}(x, 0, z) = \vec{E}(x, z) \quad (*)$$

③ $(\Pi) = (M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est plan de symétrie de \mathcal{D} passant par M .

$$\hookrightarrow \vec{E}(M) \subset (\Pi) \quad \vec{E}(M) = E_x(M) \vec{e}_x + E_y(M) \vec{e}_y \quad (**)$$

d: $(*)$ et $(**)$ $\Rightarrow \forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{E}(M) = E_x(x, z) \vec{e}_x + E_y(x, z) \vec{e}_y$

Rrq: E_x : composante radiale

E_y : 0 (ici) composante orthoradiale

E_z : composante longitudinale

④ Calcul à partir de la loi de Coulomb:

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} d_p \vec{E}(M) \quad \begin{array}{l} \text{somme des contributions élémentaires} \\ \text{au champ } \vec{E} \text{ dues à la charge } d_q(P) \\ \text{définie autour de } P \in \mathcal{D} \end{array}$$

avec $d_p \vec{E}(M) = \frac{d_q(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad \cos\alpha = \frac{x}{PM}$

$$\begin{aligned} d_q &= N dl = N d(OP) \\ &= N d(OH + HP) \\ &= N dHP \quad \text{ainsi } \tan\alpha = \frac{HP}{x} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow dHP = dtan\alpha \cdot x \quad \text{or} \quad dtan\alpha = \frac{dtan\alpha}{dx} \cdot dx = \frac{1}{\cos^2\alpha} dx$$

$$\hookrightarrow \|d_p \vec{E}(M)\| = \frac{N dHP}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \cdot \frac{1}{PM^2} = \frac{N x d\alpha}{\cos^2\alpha \cdot 4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$$

$$\|d_p \vec{E}(M)\| = \frac{N d\alpha}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x} \quad d\vec{E} = dE_x \vec{e}_x - dE_y \vec{e}_y$$

$$d\vec{E} = \|d\vec{E}\| \cos \alpha \hat{e}_x - \|d\vec{E}\| \sin \alpha \hat{e}_y$$

$$d\vec{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha d\alpha \hat{e}_x - \sin \alpha d\alpha \hat{e}_y)$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(M) = \int_{P \in \partial} d_p \vec{E}(M) = \int \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha d\alpha \hat{e}_x + \int \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} (-\sin \alpha d\alpha \hat{e}_y)$$

$$= \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \cos \alpha d\alpha \right) \hat{e}_x + \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} -\sin \alpha d\alpha \right) \hat{e}_y$$

$$d\alpha > 0 \quad \text{car } dL = dHP = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} > 0$$

d:

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \alpha_B - \sin \alpha_A) \hat{e}_x + \frac{d}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha_A - \cos \alpha_B) \hat{e}_y}$$

Cas des filés

$$\alpha_A \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \alpha_B \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{e}_x}$$

Rq: on retrouve $[\vec{E}] = \left[\frac{\lambda}{\epsilon_0 L} \right] = \left[\frac{\sigma}{\infty} \right]$

3) Champ sur l'axe de symétrie d'une spire uniformément chargée

$$\begin{cases} dq(P) = \lambda dL \\ dL = R d\theta \end{cases}$$

