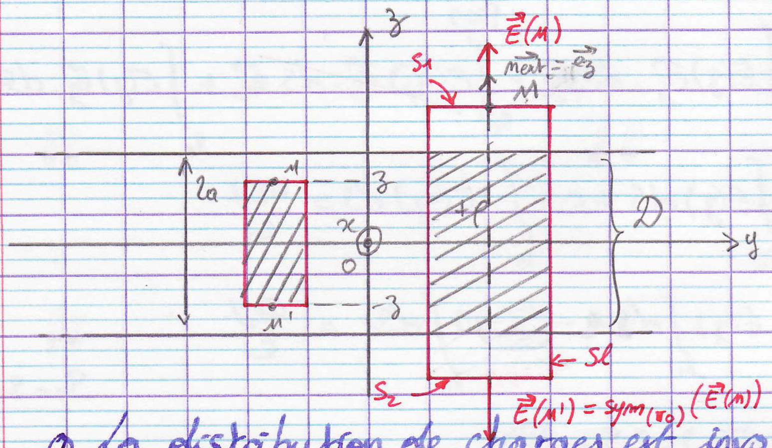
Ex EM3-10



① La distribution de charges est invariante $\forall^{te}$ translat° selon Ox et Oy.

$\rightarrow \forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{E}(M) = \vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(z) \quad (*)$

$(\pi_1) = (Mxz)$ } sont deux plans de sym de $\mathcal{D}$
$(\pi_2) = (Myz)$ } passant par M.

$\hookrightarrow \vec{E}(M) \subset ((\pi_1) \cap (\pi_2)) = (Mz)$

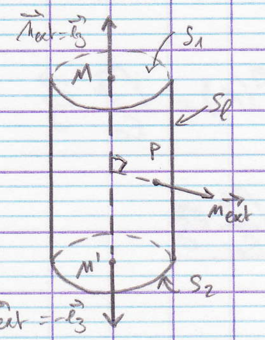
$\vec{E}(M) = E\,\vec{e}_z \quad (**)$

$(*)$ }
$(**)$ } $\rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e}_z}$

② $S = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ avec S cylindre de sect° S_1 centré en M à l'altitude z
S_2 —— M' —— $z' = -z$

d'axe (Mz)

de hauteur $h = 2z$



$(\pi_0) = (Oxy)$ est plan de sym de $\mathcal{D}$

$M \rightarrow M' = sym_{(Oxy)}(M)$

$\vec{E}(M) \rightarrow \vec{E}(M') = sym_{(Oxy)}(\vec{E}(M))$

$= -\vec{E}(M)$

$\boxed{\begin{array}{l} E(z) = -E(z) \\ \vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \end{array}}$ $\longleftarrow$ $E(-z)\,\vec{e}_z = -E(z)\,\vec{e}_z$

③ Thm de Gauss : $\oint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot dS\,\vec{n}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\int_{S_1} E(z)\vec{e_z}\cdot dS\,\vec{e_z} + \int_{S_L} \cancel{E(z_p)\vec{e_z}\cdot dS\,\vec{e_{r_p}}} + \int_{S_2} E(z)\vec{e_z}\cdot dS(-\vec{e_z}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{S_1} E(z)\,dS + 0 + \int_{S_2} -E(-z)\,dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(z)\int_{S_1} dS \underbrace{-E(-z)}_{=E(z)}\int_{S_2} dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$S_1 = S_2 = S$

(TG) $\boxed{E(z)\cdot 2S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

1er cas : $z > a$ $\quad Q_{int} = \rho V = \rho S\cdot 2a$

$V \equiv$ volume d'un cylindre de hauteur $2a$ de sect° S

(TG) $\rightarrow E(z)\cdot \cancel{2S} = \frac{\rho \cancel{S}\,\cancel{2}a}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho\cdot a}{\varepsilon_0}\vec{e_z}} \quad \text{pour } z > a$$

2e cas : $0 < z < a$

$Q_{int} = \rho V' = \rho\cdot S\cdot 2z$

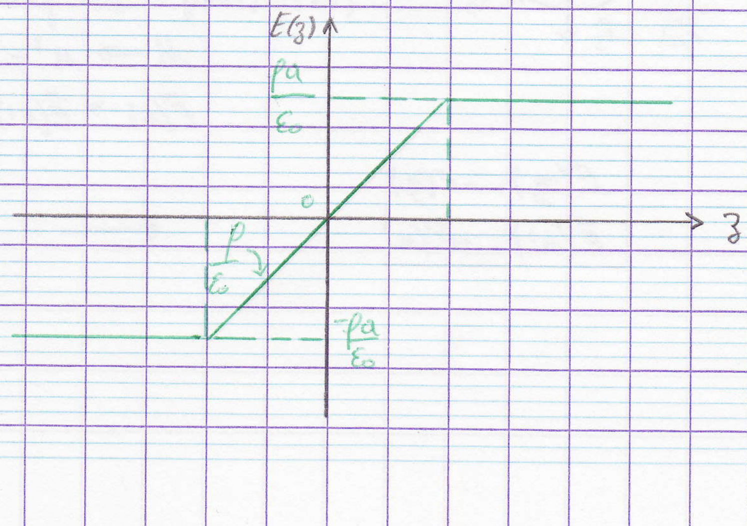
$V' \equiv$ volume de la surface fermée de Gauss

(TG) $\rightarrow E(z)\cdot \cancel{2S} = \rho\frac{\cancel{S}\cancel{2}z}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\vec{e_z}} \quad \text{pour } -a < z < a$$

Enfin pour $z < a$: $\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{e_z}}$

Profil :



EM3 . 10 : suite

④ $V(M)$?

$$\vec{E} = -\vec{grad}\,V \Leftrightarrow dV = -\vec{E}\cdot d\vec{OM}$$

$$E(z)\vec{e_z} = -\left(\cancel{\frac{\partial V}{\partial x}}\vec{e_x} + \cancel{\frac{\partial V}{\partial y}}\vec{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}\right) = -\frac{dV}{dz}\vec{e_z} \;;\; \frac{dV}{dz} = -E(z)$$

Cas $z > a$: $\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}$

$$dV = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}dz$$

$$\boxed{V = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}z + V_1}$$

Cas $-a \leq z \leq a$: $dV = -E(z)\,dz$

$$= -\frac{\rho z}{\varepsilon_0}dz$$

$$\boxed{V = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + V_2}$$

Choix $\left.\begin{array}{l} V(z=0) = 0 \\ \text{alors } V_2 = 0 \end{array}\right\}$ $V = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$

Cas $z < -a$:

$$dV = -E(z)\,dz$$

$$dV = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}dz \qquad \boxed{V = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}z + V_3}$$

Par continuité du potentiel électrq.

en $z = a$ $\quad V(a^+) = V(a^-)$

$$-\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0} + V_1 = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V_1 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

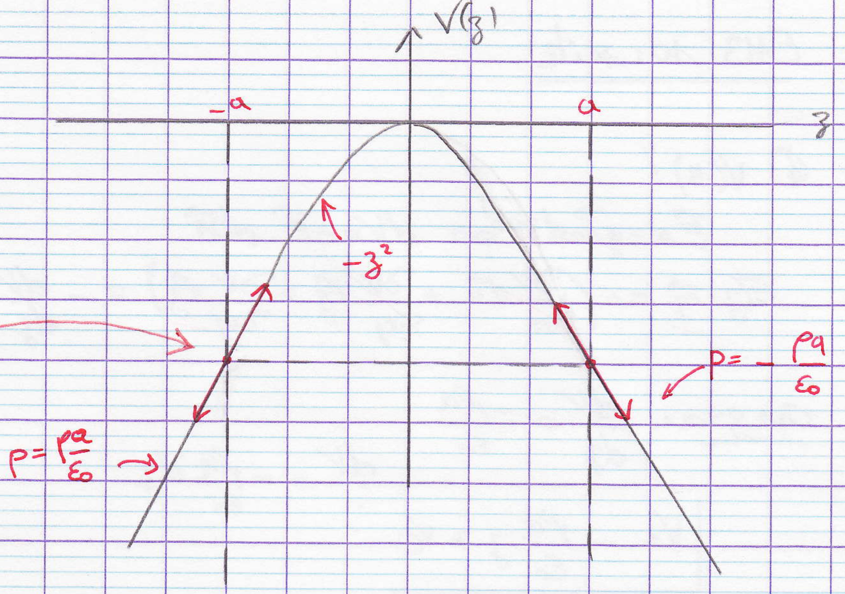
en $z = a$ $\quad V(-a^+) = V(-a^-)$

$$-\rho\frac{a^2}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0} + V_3 \rightarrow V_3 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

CCL :

$z > a$	$V(z) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}z + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$
$a < z < -a$	$V(z) = \frac{-\rho z^2}{2\varepsilon_0}$
$z < -a$	$V(z) = +\frac{\rho a}{\varepsilon_0}z + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$

cf Rq



croiss. linéaire   profil parabol^q décroiss. lin.

↳ Rque : la dérivabilité de V en $z = a$ et en $z = -a$ traduit la continuité de $\vec{E}$ en $z = a$ et $z = -a$ (normal, car D est une distribu^o de charges volumiques).

en effet $E(z = a^-) = E(z = a^+)$ (Continuité de $E(z)$)

revient à dire

$$\left(+\frac{dV}{dz}\right)(z = a^-) = \left(+\frac{dV}{dz}\right)(z = a^+)$$

ce qui signifie que V est dérivable en $z = a$

Idem en $z = -a$.