

d'où (2)

$$(1) \Rightarrow \ddot{r} + \frac{\omega_c^2}{4} r = 0 \quad \text{en posant } \omega_L \equiv \frac{\omega_c}{2} \quad \text{la coordonnée radiale } r \text{ de A dans R oscille avec la pulsat° } \omega_L \text{ puisque:}$$

$$\boxed{\ddot{r} + \omega_L^2 r = 0} \quad \boxed{\omega_L = \frac{\omega_c}{2}}$$

$\rightarrow$  A oscille sinusoïdalement selon  $\vec{e}_x' = \vec{e}_r$  dans  $R'$ .

et on peut remarquer que  $\vec{E}_r \vec{E}'_r / \rho = \vec{E}_z \vec{E}'_z = -\frac{\omega_c}{2} \vec{e}_z = -\frac{qB_0}{2m} \vec{e}_y = j\vec{t}$

### EXM6.7: Conductivité Complexée.

1) Dans le cadre du modèle de la conduction électrique d'un métal ; le PFD appliqué à un électron de conduct° des R galiléen où le réseau métallique est fixe :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E} - \frac{m}{2} \vec{v} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{clip électrique sinusoïdal} \\ \text{auquel est soumis le métal } \vec{E}_0 \cos \omega t \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \text{frottement fluide} \\ \text{traduisant l'act° du milieu sur l'électron.} \end{array}$$

$\rightarrow$  éq diff du mouvement :  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \cos \omega t$

régime forcé sinusoïdal  $\rightarrow$

la réponse ("vitesse" de l' $e^-$ ; vitesse de groupe de l' $e^-$ ) est elle aussi sinusoïdale

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 \cos(\omega t + \varphi) & \xrightarrow{\text{notat° complexe}} \vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t) \\ \vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(j\omega t + \varphi) = \vec{V} e^{j\omega t}$$

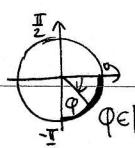
$$\rightarrow (j\omega + \frac{1}{2}) \vec{v}_0 \exp j\varphi \exp j\omega t = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \exp j\omega t$$

$$\vec{V} = \vec{v}_0 \exp j\varphi = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}_0}{\frac{1}{2} + j\omega} = \frac{q}{m} \frac{2}{1 + j\omega^2} \vec{E}_0$$

$$|\vec{v}_0| = |\vec{V}| = |V|$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 c^2}} > 0$$

$$\sin \varphi = \frac{-\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 c^2}} < 0$$



$$\vec{v}_0 = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{1 + \omega^2 c^2}} \cos \varphi \vec{E}_0$$

$$\tan \varphi = -\omega / c$$

avec  $\cos \varphi > 0$

(EXM6)  
(14/20)

2)  $\vec{j} = mq \vec{v} = mq \vec{V}_0 \exp j\omega t = \frac{mq^2}{m} \frac{\vec{E}_0}{1 + j\omega^2} \exp j\omega t = \Sigma \vec{E}$

(EXM6)  
(15/20)

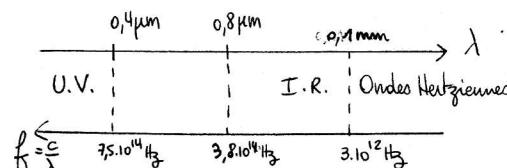
$$\vec{j} = \Sigma \vec{E} \quad \text{avec } \Sigma = \frac{mq^2 c}{m} \frac{1}{1 + j\omega^2}$$

$$\Sigma \equiv \frac{mq^2 c}{m} \text{ conductivité} \quad \Sigma = \frac{\sigma}{1 + j\omega^2} \text{ conductivité complexe}$$

On retrouve la loi d'Ohm simple ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) dans la limite  $\omega c \ll 1$   
car alors  $\Sigma \approx \sigma$

c'est-à-dire pour des clps de pulsat° faible devant  $\frac{1}{c}$   $\omega \ll \frac{1}{c}$

$$\text{fréquence } f \ll \frac{1}{c} = 10^{14} \text{ Hz}$$



$\rightarrow$  la loi d'Ohm reste valable pour un métal dans tout le domaine des ondes hertziennes.

Dans l'Infrarouge le caractère complexe de  $\Sigma$  apparaît  
 $\rightarrow$  signification physique : "retard" (déphasage  $\varphi < 0$ )  
de la vitesse  $\vec{v}$  sur le clip  $\vec{E}$ .

Dans l'UltraViolet  $f \gtrsim 10^{15} \text{ Hz} \rightarrow$  on n'a plus  $\omega c < 1$   
 $\gg$  au contraire  $\omega c \gg 1$

$$\rightarrow \Sigma_{UV} = \frac{\sigma}{1 + j\omega c} \approx -j \frac{\sigma}{\omega c}$$

Cela signifie  $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ \vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \end{cases}$$

on dit que  $\vec{v}$  est en quadrature retard p/r au clip  $\vec{E}$

3) Puissance reçue par l' $e^-$  de la part du dipole électrique :

$$\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E}_0 \cos \omega t \cdot \vec{v}_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ &= q \vec{E}_0 \cdot \vec{v}_0 \cos \omega t (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) \\ &= q \vec{E}_0 \cdot \vec{v}_0 (\cos^2 \omega t \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \quad \text{avec } \vec{v}_0 = \frac{q\varphi}{m} \cos \varphi \vec{E}_0 \\ P &= \frac{q^2 \varphi}{m} E_0^2 (\cos^2 \omega t \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \end{aligned}$$

$$\langle P \rangle = \frac{q^2 \varphi}{m} E_0^2 \left( \cos^2 \varphi \underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \langle \sin 2\omega t \rangle \right)$$

$$\langle P \rangle = \frac{q^2 \varphi}{m} E_0^2 \cos^2 \varphi \quad \langle P \rangle = \frac{\sigma}{2m} E_0^2 \cos^2 \varphi$$

Dans l'unité de volume du conducteur, il y a  $n$  électrons.

→ puissance fournie en moyenne par le dipôle électrique par unité de volume conducteur :

$$\langle p \rangle = n \langle P \rangle = \frac{\sigma}{2} E_0^2 \cos^2 \varphi \quad \text{or} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 \varphi^2}}$$

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{\sigma}{2(1+\omega^2 \varphi^2)} E_0^2}$$

Puissance moyenne de la force de frottement exercée sur les porteurs par unité de volume conducteur

$$\langle p' \rangle = n \langle P_{\text{frott}} \rangle = n \left\langle -\frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right\rangle = -\frac{m}{2} \vec{v}_0^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = -\frac{m n \varphi}{2} \vec{v}_0^2$$

$$\text{avec } \vec{v}_0 = \frac{q\varphi}{m} \cos \varphi \vec{E}_0$$

$$\rightarrow \langle p' \rangle = -\frac{m n \varphi}{2} \frac{q^2 \varphi^2}{m^2} \frac{1}{1+\omega^2 \varphi^2} E_0^2 = -\frac{\sigma}{2(1+\omega^2 \varphi^2)} E_0^2$$

$$\sigma = \frac{m q^2 \varphi}{m}$$

(EXMG  
19/20)

$$\text{d'où } \langle p' \rangle = -\langle p \rangle$$

$$\text{Or la force de frottement } \vec{f}_{\text{frott}} = \vec{f}_{\text{réseau}} \rightarrow e^- = -\vec{f}_{e^- \rightarrow \text{réseau}}$$

$$\text{donc } \langle p' \rangle = -\langle P_{e^- \rightarrow \text{réseau}} \rangle$$

puissance fournie par les  $e^-$  sous forme de frottement

puissance reçue par le réseau de la part de  $e^-$

≡ puissance reçue par le réseau par effet Joule. =  $\langle p \rangle$

Dans l'ultraviolet :  $\langle p \rangle = \langle p_J \rangle = \frac{\sigma E_0^2}{\omega \varphi^2}$  est très faible car  $\omega \varphi \gg 1$

On pourrait s'en douter car  $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  soit  $\cos \varphi \rightarrow 0$   
soit  $\vec{v}_0 \rightarrow \vec{0}$   
 $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$

$$\bullet \text{ Pour PFD } m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{2} \vec{v}^2$$

↓ pour  $n$   $e^-$  (donc pour l'unité de volume)

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{1}{2} m n \vec{v}^2 \right) = m (q\vec{E} \cdot \vec{v} - \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$\boxed{\langle \frac{d}{dt} E_{k,\text{vol}} \rangle = \begin{cases} \langle p \rangle + \langle p' \rangle = 0 \\ 0 \end{cases}}$$

↑ l'énergie cinétique des porteurs ne varie pas en moyenne (puisque  $n$  sinusoidale)

On retrouve que → l'énergie apportée par le dipôle électrique est entièrement dissipée par la force de frottement (effet Joule).

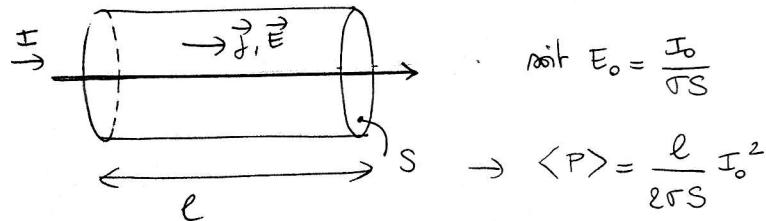
4) Dans la limite des basses fréquences :  $\omega \varphi \ll 1$  (ondes hertziniennes) :

Pour un tronçon cylindrique la puissance moyenne fournie aux porteurs par  $\vec{E}$  est :

$$\langle P \rangle = \text{volume du tronçon} \langle p \rangle_{\text{volumique}} = S l \cdot \frac{\sigma}{2(1+\omega^2 \varphi^2)} E_0^2 \approx \frac{\sigma S l}{2} E_0^2$$

(EXMG  
19/20)

alors la loi d'Ohm est valable:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  avec  $J_{\max} = j_0 = \sigma E_0$  (EXMG 18/20)



la résistance d'un tronçon métallique cylindrique de résistivité  $\rho$  est  $R = \frac{\rho l}{S}$

$$\text{soit } R = \frac{l}{\sigma S} \text{ puisque } \rho = \frac{1}{\sigma}$$

(cf cours MG)

$$\rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2 = \langle R I_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle$$

Interprétation:

Cette puissance moyenne correspond bien à la moyenne temporelle de la puissance dissipée à chaque instant par effet Joule:  $P = RI^2 = RI_0^2 \cos^2(\omega t)$  puisque  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$

### EXMG-8 : Protons dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ parallèles

$\vec{E} = E \vec{e}_z$      $E > 0$      $\vec{B} = B \vec{e}_z$      $B > 0$

PFD:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

$\downarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qE}{m} \vec{e}_z + \frac{qB}{m} \vec{v} \times \vec{e}_z$

Posons  $w_c = \frac{qB}{m}$  et  $a = \frac{qE}{m}$   $\rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = a \vec{e}_z + w_c \vec{v} \times \vec{e}_z$

$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$  avec  $\vec{v}_{||} = v_z \vec{e}_z$

$\frac{d\vec{v}_{||}}{dt} = \frac{d(v_z \vec{e}_z)}{dt} = \frac{d(v_z)}{dt} \vec{e}_z + v_z \frac{d\vec{e}_z}{dt}$

$\frac{d\vec{v}_{||}}{dt} = a \vec{e}_z \rightarrow$  projectons selon  $\vec{e}_z$ :  $v_z = a$  soit  $v_z = at + v_{z0}$

$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = w_c \vec{v}_{\perp} \times \vec{e}_z = w_c \vec{v}_{\perp} \times \vec{e}_z = w_c \begin{vmatrix} \vec{v}_{\perp} & \times & 0 \\ v_y & 0 & 1 \\ 0 & -w_c v_x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_c v_y & \\ -w_c v_x & 0 \end{vmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = w_c v_y \quad (1) \\ \ddot{y} = -w_c v_x \quad (2) \end{array} \right. \xrightarrow{\frac{dt}{dt}} \ddot{x} = -w_c^2 v_x \rightarrow \ddot{x} + w_c^2 v_x = 0 \text{ soit } \ddot{x} = -w_c^2 v_x \cos(\omega_c t + \phi_0)$$

$$v_x = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t$$

$$t=0 \quad v_x = 0 = A$$

$$\dot{v}_x = \left\{ \begin{array}{l} w_c v_y(0) = w_c v_0 \\ B \omega_c \end{array} \right. \rightarrow B = v_0$$

$$v_x = v_0 \sin \omega_c t$$

$$v_y = v_0 \cos \omega_c t$$

$$x = -\frac{v_0}{\omega_c} \cos \omega_c t + cte$$

$$y = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + cte'$$

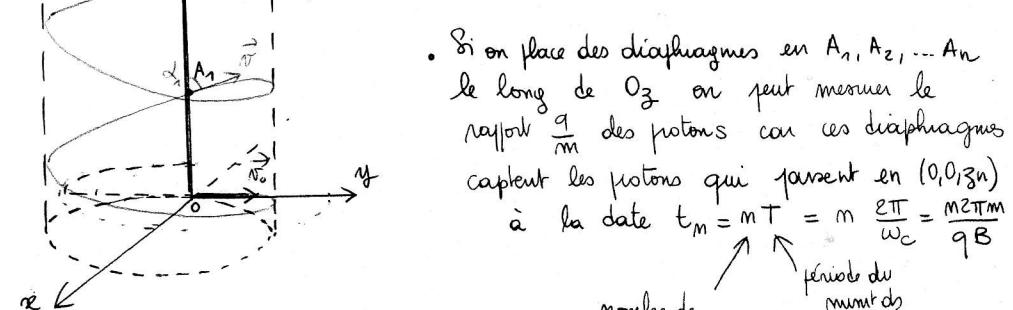
$$at = 0 \quad x = 0 \rightarrow x = \frac{v_0}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$$

$$y = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t$$

↑ accélération le long de  $Oz$

$$(x - \frac{v_0}{\omega_c})^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$$

la projection de la trajectoire selon Oxy est un cercle de rayon  $\frac{v_0}{\omega_c}$  centré en  $(\frac{v_0}{\omega_c}, 0, 0)$



Si on place des diaphragmes en  $A_1, A_2, \dots, A_n$  le long de  $Oz$  on peut mesurer le rayon  $\frac{q}{m}$  des protons car ces diaphragmes captent les protons qui passent en  $(0, 0, z_m)$  à la date  $t_m = nT = m \frac{2\pi}{\omega_c} = m \frac{2\pi m}{qB}$

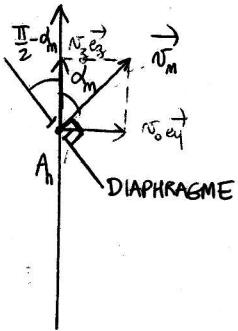
↑ période du mouvement du proton le long de  $Oz$

mouvement du proton le long de  $Oz$

$$\text{or } z = \frac{1}{2} at^2 \text{ soit } z_m = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m}\right) \left(\frac{m 2\pi m}{qB}\right)^2 = \frac{E}{B^2} \frac{m^2 8\pi^2}{9} = k m^2$$

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{B^2} \frac{8\pi^2 m^2}{3z_m}$$

Il suffit de déplacer le diaphragme selon  $Oz$  jusqu'à capturer un proton une 1<sup>re</sup> fois, puis une 2<sup>de</sup>, une troisième etc... on mesure  $z_1, z_2, z_3, \dots$  on en déduit  $\frac{q}{m}$ .



Il faut placer correctement le diaphragme selon  $\vec{v}_z$  pour pouvoir capter le proton. (29/80)

→ expression de  $\alpha_m$  ?

lorsque le proton passe en  $A_m = (0,0,z_m)$  on est à la date  $t_m = mT$

$$\text{alors } \vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp} = at_m \vec{e}_z + v_0 \sin \omega_c t_m \vec{e}_x$$

$$\text{soit } \vec{v} = at_m \vec{e}_z + v_0 \vec{e}_y \quad \tan \alpha_m = \frac{v_0}{at_m} = \frac{v_0}{\frac{\pi E}{2m}} = \frac{v_0}{\frac{\pi E}{2m} \frac{m \omega_c m}{B}}$$

$$\boxed{\tan \alpha_m = \frac{v_0 B}{2\pi E} \frac{1}{m}}$$

lorsque  $m \uparrow \tan \alpha_m \rightarrow 0$  soit  $\alpha_m \rightarrow 0$