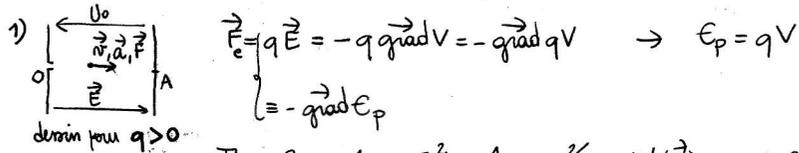


CORRECTION DES EXERCICES D'ÉLECTROMAGNÉTISME

EXM6  
1/20

EXM6-1: Accélération de Particule Chargée.



Thm Ek:  $\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W(\vec{E}) = -\Delta E_p = E_p(0) - E_p(A)$

$v_A^2 = \frac{2}{m} q (V_0 - V_A) = \frac{2qU_0}{m}$

$v = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}} = \sqrt{\frac{-2qV_A}{m}}$  ni  $q > 0 \quad U_0 \equiv V_0 - V_A > 0 \quad \text{ni } V_0 = 0 \text{ (max)} \rightarrow V_A < 0$   
ni  $q < 0 \quad U_0 \equiv V_0 - V_A < 0 \quad \text{ni } V_0 = 0 \quad V_A > 0$

$\vec{E} = E \vec{e}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$  d'où  $V(x) = -Ex + \frac{V_0}{L}$  (max)

avec  $V(L) = -EL = V_A$  soit  $E = -\frac{V_A}{L} = \frac{V_0 - V_A}{L} = \frac{U_0}{L}$

$V(x) = -\frac{U_0}{L} x$  donc Thm Ek entre 0 et x:  $\frac{1}{2} m v^2(x) - 0 = q(V_0 - V(x))$

$v = \sqrt{\frac{-2qV(x)}{m}} = \sqrt{\frac{+2qU_0}{m}} \quad v \vec{e}_x = \frac{dx}{dt}$

$\rightarrow dt = \sqrt{\frac{Lm}{2qU_0}} \frac{dx}{v} \rightarrow \tau = \int_0^L \sqrt{\frac{Lm}{2qU_0}} \frac{dx}{v} = \sqrt{\frac{Lm}{2qU_0}} 2\sqrt{L}$

$\tau = L \sqrt{\frac{2m}{qU_0}} = L \sqrt{\frac{2m}{-qV_A}}$

$\rightarrow$  2) Pour un électron:  $U_0 = -100V \quad V_A = 100V \quad q = -e < 0$

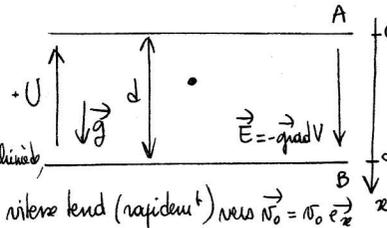
$v = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1} \quad \tau = 8,4 \cdot 10^{-9} \text{ s}$

3) Pour un ion argon:  $U_0 = 3000V \quad V_A = -3000V \quad q = e > 0$

$v = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1} \quad \tau = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

EXM6-2: Expérience de Millikan:

$\rightarrow$  Référentiel d'étude  $\equiv$  réf. du laboratoire (terrestre) supposé galiléen.



1)  $U=0 \rightarrow$  Cas d'une chute sous l'act° de la Poussée d'Archimède,

de la pesanteur et d'une force de frottement fluide visqueux  $\rightarrow$  la vitesse tend (rapidement) vers  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$

vitesse limite: Project° PFD selon  $\vec{e}_z$ :  $m a_z = +mg - m_f g - 6\pi\eta r v$

EXM6  
2/20

$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \vec{v} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$

$\vec{v} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \vec{g} = \frac{2,3 \eta r \cdot 3}{2,2 \pi r^3 \rho} \vec{v} \rightarrow \vec{v} + \frac{9\eta}{2\pi r^2} \vec{v} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \vec{g}$

$v = A \exp\left(\frac{-2\pi^2 \rho t}{9\eta}\right) + v_0$

$\rightarrow 0$  au bout de qqes  $\tau = \left(\frac{9\eta}{2\pi r^2}\right)^{-1}$

$v_0 = \frac{2 \cdot \pi^2 (\rho - \rho_0) g}{9\eta}$

$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\rho - \rho_0) g}}$

2)  $U = U_1 \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v} + q_0 \vec{E}$

pour les particules chargées de charge  $q_0$

Puisque les particules de charges  $q_0$  st en équilibre  $v \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

d'où, par project° selon  $(Ox)$ :  $0 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g + q_0 E$  (E algébrique!)

$\rightarrow q_0 = -\frac{4}{3} \pi r^3 \frac{(\rho - \rho_0)}{E} g$

$U_1 = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A \text{grad } V \cdot d\vec{r} = \int_B^A +\text{grad } V \cdot dx \vec{e}_z = \int_A^B -\text{grad } V \cdot dx \vec{e}_z$

$U_1 = \int_A^B \vec{E} \cdot dx \vec{e}_z = E \int_0^d dx = Ed$

car  $\text{grad } V = \frac{dV}{dx} \vec{e}_z$   $V$  ne dépend que de  $x$

$E = \frac{U_1}{d}$

$q_0 = -\frac{4}{3} \pi r^3 \frac{(\rho - \rho_0)}{U_1} dg$  et puisque  $r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\rho - \rho_0) g}}$

$q_0 = -\frac{4}{3} \pi g \frac{\eta v_0}{2(\rho - \rho_0) g} \cdot 3 \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\rho - \rho_0) g}} \cdot d \frac{\rho - \rho_0}{U_1}$

$q_0 = -18 \frac{\pi \eta v_0 d}{U_1} \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\rho - \rho_0) g}}$

3) la charge des gouttelettes est  $\neq q_0$ :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v} + q_1 \vec{E}$   
 $\vec{v} = -v_1 \vec{e}_z$  (mouvt ascendant et uniforme)

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad 0 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g + 6\pi\eta r v_1 + q_1 \frac{U_1}{d}$

d'où  $q_1 = -\frac{d}{U_1} \left[ \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g + 6\pi\eta r v_1 \right]$

$$\text{Soit } q_1 = +q_0 - \frac{d}{U_1} 6\pi\eta r v_1 = -\frac{18\pi\eta v_0 d}{U_1} \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(p-p_0)g}} - \frac{d}{U_1} 6\pi\eta r \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(p-p_0)g}} v_1$$

$$q_1 = -18 \frac{\pi\eta d}{U_1} \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(p-p_0)g}} (v_0 + v_1)$$

4) AN:  $q_0 = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$      $q_1 = -8 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

→ la charge est un multiple entier de fois la valeur  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

→ le faisceau de rayons X ne peut pas ioniser l'atmosphère m'importe comment → la charge est une grandeur discontinue  
cette expérience met en évidence la charge élémentaire:  $e$ .

EXM6-3

1) PFD appliqué à une particule (proton) placée dans un champ  $\vec{B}$  uniforme (on néglige le poids)

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q\dot{y}B_0 \\ -q\dot{x}B_0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \ddot{z} = 0 \text{ soit } \dot{z} = ct = \dot{z}(0) = 0$$

car le proton arrive de  $\vec{B}_0$  avec la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$

soit  $\dot{z} = ct \rightarrow$  le mouvement est PLAN

• Thm de l'Ek:  $dE_k = \delta W (q \vec{v} \times \vec{B}) = (q \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$  la force magnétique ne travaille pas.

→  $dE_k = 0$  soit  $E_k = ct = E_k(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2$

e) PFD →  $\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \dot{x} \end{cases}$  soit  $\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \omega_c y + ct = \\ \dot{y} = -\omega_c x \end{cases}$   
à  $t=0$   $\dot{x} = v = \omega_c x + ct$   
soit  $\dot{x} = \omega_c y + v$  (\*)

d'où  $\dot{y} = -\omega_c \dot{x} = -\omega_c^2 y - \omega_c v$

soit  $\dot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v$      $y = -\frac{v}{\omega_c} + A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t$

à  $t=0$   $\begin{cases} y=0 = -\frac{v}{\omega_c} + A \\ \dot{y}=0 = +B\omega_c \end{cases} \rightarrow y = -\frac{v}{\omega_c} + \frac{v}{\omega_c} \cos \omega_c t$

d'où  $\dot{x} = \omega_c y + v = -\frac{v}{\omega_c} \omega_c + v \cos \omega_c t + v \rightarrow x = \frac{v}{\omega_c} \sin \omega_c t$

les coordonnées du proton à l'instant  $t$ :

$$\begin{cases} x = \frac{v}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y = \frac{v}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \\ z = 0 \end{cases}$$

EXM6  
4/80

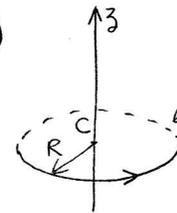
3) Caractéristique de la trajectoire du proton:

$$x^2 + \left(y + \frac{v}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v}{\omega_c}\right)^2 \rightarrow \text{Trajectoire:}$$

cercle de centre  $(0, -\frac{v}{\omega_c}, 0)$   
dans le plan  $xOy$   
de rayon  $R = \frac{v}{\omega_c} = \frac{v m}{q B_0}$   
fréquence du mot:  $f = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{q B_0}{2\pi m}$

la fréquence du mouvement:  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{2\pi}$   
 $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega_c}$

4)



Boucle de courant formée d'un proton tournant avec la période T autour de  $(C_z)$ .  
correspondant à un courant  $I = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} = qf$

$$I = \frac{q^2 B_0}{2\pi m}$$

$\mu \equiv$  Intensité  $\times$  aire intérieure de la trajectoire  $= I \cdot \pi R^2$

$$\mu = \frac{q^2 B_0}{2\pi m} \cdot \pi \left(\frac{v m}{q B_0}\right)^2 = \frac{v^2 m}{2 B_0} \quad \mu = \frac{v^2 m}{2 B_0}$$

EXM6-4:

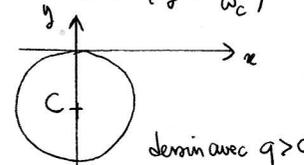
1) R (Oxyz)  $\vec{B} = B \vec{e}_z$

a) CI:  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$      $v_0 > 0$

cf EXM6-3

$$x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$$

$\omega_c \equiv \frac{q B_0}{m}$  // Cercle centré en  $(0, -\frac{v_0}{\omega_c}, 0)$   
de rayon  $R = \frac{v_0}{|\omega_c|} = \frac{v_0 m}{|q| B}$



b)  $\vec{v}_0 = v_{0z} \vec{e}_z + v_{0y} \vec{e}_y$

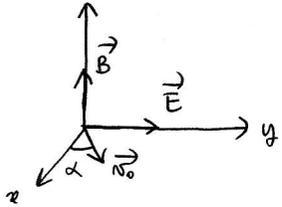
Dans le PFD, seule l'équation portant sur  $\dot{z}$  change:  $\ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = ct = v_{0z}$

→  $z = v_{0z} t$  →  $z = v_{0z} t$  → hélice; mot hélicoïdal ( $t=0$  cf cours M6)

2)  $\vec{E} = E \vec{e}_y \quad E > 0 \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{e}_z \quad B > 0$

EM6  
5/20

a)  $\underline{CI}$  à  $t=0 \quad x=y=z=0$  (origine)  $\vec{v} = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y \quad v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$



PFD:  $m \vec{a} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = q B \dot{y} \\ m \ddot{y} = -q B \dot{x} + q E \\ m \ddot{z} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Mouvt ds le plan (xOy) cf 1)a}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} + \frac{q}{m} E \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d v_x}{dt} = \omega_c v_y & (1) \\ \frac{d v_y}{dt} = -\omega_c v_x + \frac{q E}{m} & (2) \\ v_z = \dot{z} = 0 & (3) \end{cases} \quad \omega_c = \frac{q B}{m}$$

b) (3)  $v_z = \dot{z} = 0 \Rightarrow \underline{z = cté}$  or à  $t=0 \quad z=0 \rightarrow \underline{z(t)=0}$

(1) + j(2)  $\rightarrow \frac{d}{dt} (v_x + j v_y) = \omega_c (v_y - j v_x) + j \frac{q E}{m} = -j \omega_c (v_x + j v_y) + j \frac{q E}{m}$

d'où  $\dot{v} + j \omega_c v = j \frac{q E}{m}$

les solutions de cette eq diff sont:  $v = A \exp(-j \omega_c t) + \frac{q E}{m \omega_c} = A \exp(-j \omega_c t) + \frac{E}{B}$

à  $t=0 \quad v(0) = v_{0x} + j v_{0y} = A + \frac{E}{B} = (a + \frac{E}{B}) + j b$  puisque  $A = a + j b$

$$\left. \begin{aligned} a &= v_{0x} - \frac{E}{B} \\ b &= v_{0y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \left( v_{0x} - \frac{E}{B} + j v_{0y} \right) \exp(-j \omega_c t) + \frac{E}{B}$$

Soit encore:  $v_x + j v_y = \left( v_{0x} - \frac{E}{B} + j v_{0y} \right) \cos \omega_c t - \left( v_{0x} - \frac{E}{B} + j v_{0y} \right) j \sin \omega_c t + \frac{E}{B}$   
 $= \left[ \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \cos \omega_c t + v_{0y} \sin \omega_c t + \frac{E}{B} \right] + j \left[ v_{0y} \cos \omega_c t - \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_c t \right]$

$$\rightarrow \begin{cases} v_x = \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \cos \omega_c t + v_{0y} \sin \omega_c t + \frac{E}{B} \\ v_y = v_{0y} \cos \omega_c t - \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_c t \end{cases}$$

EM6  
6/20

$\rightarrow$  puisque  $v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$

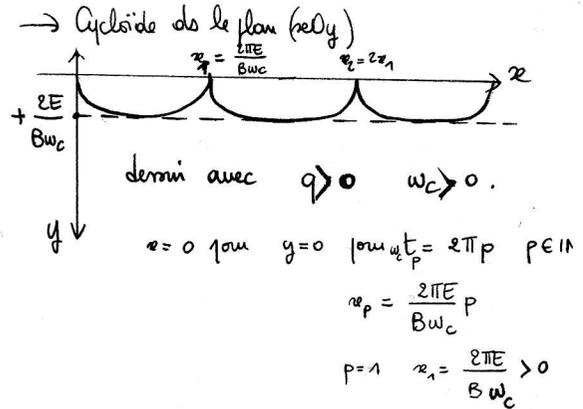
$x(t) = \frac{1}{\omega_c} \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_c t - \frac{v_{0y}}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{E}{B} t + cté \rightarrow t=0 \quad 0 = -\frac{v_{0y}}{\omega_c} + cté$

$y(t) = \frac{1}{\omega_c} v_{0y} \sin \omega_c t + \frac{1}{\omega_c} \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \cos \omega_c t + cté \rightarrow t=0 \quad 0 = \frac{1}{\omega_c} \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) + cté$

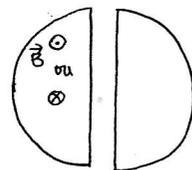
D'où: 
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\omega_c} \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_c t + \frac{v_{0y}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{E}{B} t \\ y(t) = \frac{1}{\omega_c} v_{0y} \sin \omega_c t + \frac{1}{\omega_c} \left( v_{0x} - \frac{E}{B} \right) (\cos \omega_c t - 1) \end{cases}$$
 avec  $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$

c) lorsque  $v_0 = 0$  (vitesses initiales nulles):

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{E}{\omega_c B} \sin \omega_c t + \frac{E t}{B} \\ y(t) = -\frac{E}{\omega_c B} (\cos \omega_c t - 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{E}{B \omega_c} (\omega_c t - \sin \omega_c t) \\ y(t) = \frac{E}{B \omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \end{cases} \text{ et } \underline{z=0}$$



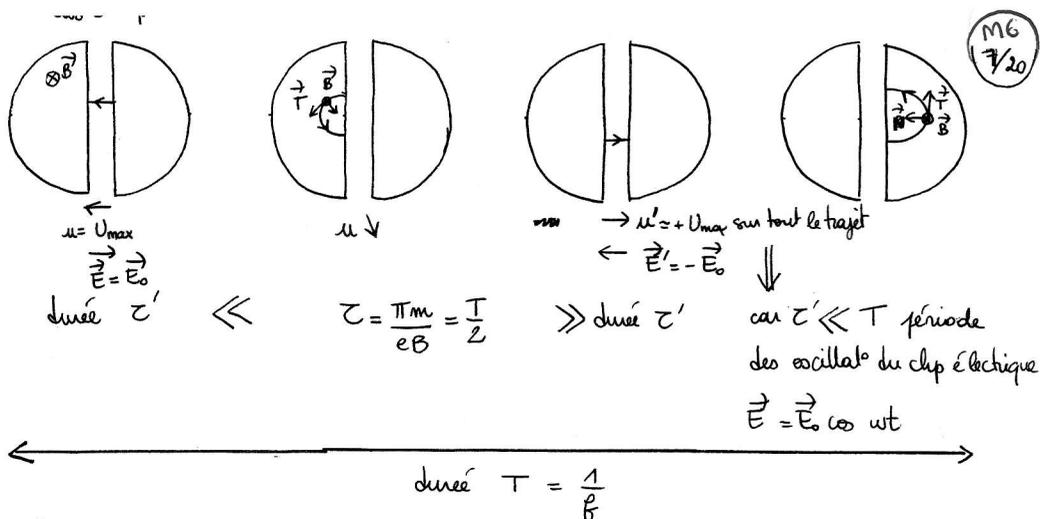
EXM6-5: Cyclotron (1):



1)  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan du mouvement.

$\rightarrow$  Dans un Dee, le mouvt est circulaire uniforme à la fréquence cyclotron  $\omega_c = \frac{e B}{m}$   $\rightarrow$  le temps mis pour effectuer un passage dans un Dee correspond au temps mis pour faire  $\frac{1}{2}$  tour  $\rightarrow \tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{e B} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

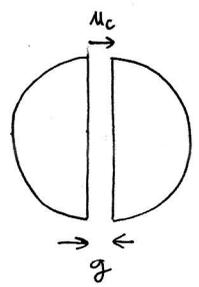
2) Il faut qu'à chaque tour, la tension retrouve la m même valeur (sachant qu'elle change de signe à chaque demi tour):



M6  
7/20

EXM6-6: Cyclotron (2) [CCP 1993]

M6  
8/20



$$v_c = U_c \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{E} = \frac{U_c}{g} \vec{e}_z$$

1) cf EXM6-5 & Cours

$$v_c = \frac{eB}{2\pi m}$$

B = 1,5 T

Pour que les protons soient effectivement accélérés à chaque passage de l'espace entre les dees, il faut que la fréquence du dip électrique soit accordée sur celle du dip magnétique.

AN  $v_c = 23,9 \text{ MHz}$

2) le rayon de la trajectoire du proton est :

$$r = \frac{mv}{qB} \text{ pour la } m^{\text{ème}} \text{ trajectoire : } r_m = \frac{mv_m}{eB}$$

lorsque le proton parcourt son 1<sup>er</sup> 1/2 cercle il a été accéléré 1 fois sous la tension  $v_{\text{max}} = U_c \rightarrow$  sa variat° d'énergie cinétique

$$\Delta E_{k(1)} = qU_c \text{ pour 1}^{\text{ère}} \text{ accélérat°}$$

$$\Delta E_{k(2)} = qU_c \text{ pour 2}^{\text{de}} \text{ accélérat°}$$

$$\Delta E_{k(m)} = qU_c \text{ pour } m^{\text{ème}} \text{ acc}$$

plus traj circulaire de rayon  $r_1$  dans  $\vec{B}$  condition de synchronisme  $r_2$

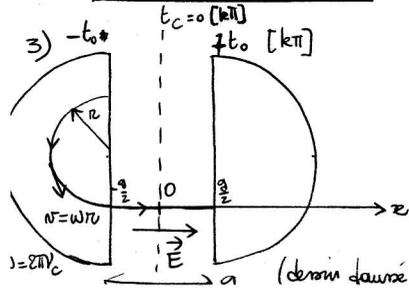
$$\Delta E_{k(1)} + \Delta E_{k(2)} + \dots + \Delta E_{k(n-1)} + \Delta E_{k(n)} = m q U_c$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + \dots + \frac{1}{2} m v_{n-1}^2 - \frac{1}{2} m v_{n-2}^2 + \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{1}{2} m v_{n-1}^2 = m q U_c$$

$$\rightarrow v_n^2 = \frac{2 m q U_c}{m} \rightarrow r_m = \frac{1}{eB} \sqrt{2 m q U_c m} \text{ avec } q = e$$

$$r_m = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m U_c m}{e}}$$

AN :  $m = 400$   
 $U_c = 50 \text{ kV}$  }  $\rightarrow r_m = r_{400} = 42,2 \text{ cm}$



Travail de la force électrique à la traversée de l'espace accélérat° :  $W = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e E dz$  avec  $E = \frac{U_c}{g} \sin(\omega t + \varphi)$

fréquence de la tension alternative :  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi m} = 2,3 \cdot 10^7 \text{ Hz}$

3) le rayon  $R_c$  de la Trajectoire de un des Dees est lié à la vitesse du proton :

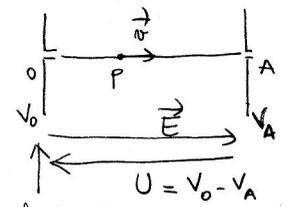
$$m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) = m \frac{v^2}{R_c} \vec{N} = q \left| \vec{v} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix} \right| = +q v B \vec{N}$$

$$\rightarrow R_c = \frac{mv}{qB} = \frac{mv}{eB}$$

d'où  $R_{c\text{max}} = \text{Rayon d'un Dee} = \frac{mv_{\text{max}}}{eB}$

$$\rightarrow v_{\text{max}} = \frac{eBR}{m} \rightarrow E_{k\text{max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 R^2 B^2}{m} = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Si on s'était contenté d'accélérer un proton par un dip électrique uniforme, ie sous une tension U



abandon sous vitesse initiale avec l'énergie pot  $E_p = qV_0$

thm  $E_k \Rightarrow dE_k = \delta W(F_{elec}) = -dE_p$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - 0 = -(qV_A - qV_0)$$

$$U = \frac{E_{k\text{max}}}{q} = \frac{1,1 \cdot 10^{-11}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 69 \cdot 10^6 \text{ V}$$

C'est beaucoup...

résultat si on veut créer cette tension U sur une courte distance!

$\rightarrow$  Il est plus avantageux de travailler avec le cyclotron et une fréquence variable!

$$w = \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} e \frac{U_c}{g} \sin(\omega t + \phi_0) dz \quad (\text{on tient compte de la variat}^\circ \text{ du chp accélérateur). \quad \text{EXM6 } \frac{3}{10}$$

$$dz = \omega r dt = \omega r dt$$

↓ ↑  
w semblent être ds l'intervalle g (ce qui est fait en the rigueur puisqu'il y a accélération!)

$$z = \omega r t + \text{cte} \rightarrow -\frac{g}{2} = \omega r (-t_0) \rightarrow t_0 = \frac{g}{\omega r}$$

choix nulle ni en pnd l'origine des abscisses sur le plan médiateur

$$w = \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} e \frac{U_c}{g} \sin(\omega t + \phi_0) \omega r dt = \frac{e U_c}{g} r \left[ -\cos(\omega t + \phi_0) \right]_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \frac{g}{\omega r}$$

$$= \frac{e U_c}{g} r \left( \cos\left(-\frac{g}{2r} + \phi_0\right) - \cos\left(\frac{g}{2r} + \phi_0\right) \right)$$

$$= \frac{e U_c}{g} r \left( -2 \sin\left(\frac{\frac{g}{2r} + \phi_0 + \frac{g}{2r} + \phi_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{g}{2r} - \phi_0 - \frac{g}{2r} - \phi_0}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{e U_c}{g} \sin \phi_0 \sin \frac{g}{2r}$$

$$w = e U_c \frac{\sin\left(\frac{g}{2r}\right)}{\frac{g}{2r}} \sin \phi_0$$

b) Pour que le gain en énergie  $\Delta E_k = w$  soit maximal, il faut  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$

c) Calculons la qté:  $a = \frac{\sin \frac{g}{2r}}{\frac{g}{2r}}$

pour  $r = r_1$  (rayon minimum):  $r_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_p U_c}{e}} = 2,1 \text{ cm} \rightarrow a = 0,991$

pour  $r = r_{400}$  (rayon maximum):  $r_{400} = 42,2 \text{ cm}$  (cf 2))  $\rightarrow a = 1,000$   
même  $\frac{1}{2}$  orbite où  $n=400$

⇒ Cl: avec une très bonne approximation, pendant le mnt du proton dans le cyclotron, on peut considérer  $a = \text{cte} = 1$ .

on en déduit qu'à la suite de chaque  $\frac{1}{2}$  orbite, le proton voit son énergie cinétique augmenter de la même valeur  $w = e U_c a \sin \phi_0$  cf 3a)

→ au bout de la  $n^{\text{ème}} = 400^{\text{ème}}$  accélération, à la suite de la  $n^{\text{ème}} \frac{1}{2}$  orbite, le proton a reçu l'énergie cinétique:  $E_k = m w = m e U_c a \sin \phi_0$   
puisque d'après 3b)  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $a = 1$

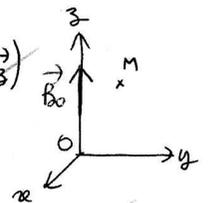
$$E_k = m e U_c = 400 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^3 = 3,2 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 20 \text{ MeV}$$

$$1 \text{ J} = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ eV}$$

d) les protons sont accélérés uniquement s'ils traversent la zone accélératrice en phase avec le chp électrique.

→ Il y a donc du cyclotron un paquet de protons à chaque période  $T_c = \frac{1}{\nu_c} = 42 \text{ ns}$ .

EXM6-7: Piège de Penning.  $\vec{E}(M) = \frac{U_0}{2R^2} (-x \vec{e}_x - y \vec{e}_y + 2z \vec{e}_z)$   
Système électron  $\{m, -e\}$



1) Position d'équilibre de l'électron?

→ en O:  $\vec{E}(O) = \vec{0}$   $m \vec{a} = q \vec{E} = \vec{0}$   
 $\Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow e^- = \vec{0}$  l' $e^-$  est donc en équilibre

→ Pour discuter de la stabilité de cet équilibre on se place en  $M(x, y, z)$  proche de O:

$$\text{PPD} \rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = \frac{e U_0 x}{2R^2} & \ddot{x} - \frac{e U_0}{2m R^2} x = 0 \\ m \ddot{y} = \frac{e U_0 y}{2R^2} & \ddot{y} - \frac{e U_0}{2m R^2} y = 0 \\ m \ddot{z} = -\frac{e U_0 z}{R^2} & \ddot{z} + \frac{e U_0}{m R^2} z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{\omega_z^2}{2} x = 0 & \rightarrow x = \alpha \exp\left(-\frac{\omega_z}{\sqrt{2}} t\right) + \beta \exp\left(\frac{\omega_z}{\sqrt{2}} t\right) \rightarrow \pm \infty \\ \ddot{y} - \frac{\omega_z^2}{2} y = 0 & \rightarrow y = \gamma \exp\left(-\frac{\omega_z}{\sqrt{2}} t\right) + \delta \exp\left(\frac{\omega_z}{\sqrt{2}} t\right) \rightarrow \pm \infty \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 & \rightarrow z = A \cos(\omega_z t + \varphi) \end{cases}$$

→ le mnt le long de l'axe ( $Oz$ ) est stable (l' $e^-$  "oscille" autour de sa pos<sup>o</sup> d'éq)  
le mnt dans le plan ( $xy$ ) est instable (l' $e^-$  s'éloigne de O!)