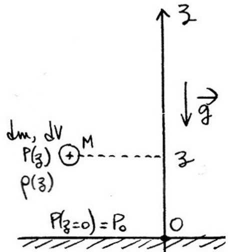
EXT2-2 Pression Atmosphérique en altitude.

• Quel que soit le champ de température, la RFSF pour la particule de fluide {M} à l'altitude z s'écrit :

① $\boxed{\dfrac{dP}{dz} = -\rho g}$ si l'axe vertical (Oz) est ascendant.

• De plus, pour un gaz parfait : $P(z)\,dV = dn\,RT = \dfrac{dm}{M}RT$

soit : $\boxed{P(z) = \rho(z)\dfrac{RT}{M}}$ ②



$$①\xrightarrow{②}\ \frac{dP}{dz} = -\frac{MP(z)}{RT}g \quad \text{soit :} \quad \boxed{\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz} \ (*)$$

1) Atmosphère isotherme $T(z) = cte = T_0 \quad \forall z$

(*) devient : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT_0}dz$ soit $\ln P - \ln P_0 = -\dfrac{Mg}{RT_0}(z-0)$

d'où $\ln\dfrac{P}{P_0} = -\dfrac{Mg}{RT_0}z$ soit $\boxed{P(z) = P_0\exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT}\right)}$

AN : au sommet du Mont Blanc : $z = 4807\,m \longrightarrow \boxed{P = 0{,}575.10^5\ Pa = 0{,}575\ bar}$

2) Atmosphère telle que $T(z) = T_0 - Az$:

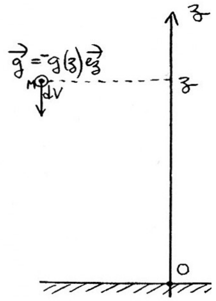
(*) devient : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{R}\dfrac{dz}{T_0 - Az}$ soit $\ln\dfrac{P}{P_0} = +\dfrac{Mg}{RA}\Big|\ln(T_0 - Az)\Big|_{z=0}^{z}$

d'où : $\ln\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{Mg}{RA}\ln\left(\dfrac{T_0 - Az}{T_0}\right)$ soit $\boxed{P(z) = P_0\left(1 - \dfrac{Az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{RA}}}$

AN : au sommet du Mont Blanc : $\boxed{P = 0{,}557.10^5\ Pa = 0{,}557\ bar}$

EXT2-3 Variation de g avec l'altitude

① $g(z) = g_0\left(\dfrac{R_T}{R_T + z}\right)^2$ et RFSF : $\begin{cases} \dfrac{dP}{dz} = -\rho g & ② \\ \text{GP : } \rho = \dfrac{MP(z)}{RT} & ③ \end{cases}$



$$②\ \frac{\xrightarrow{①}}{③}\ \frac{dP}{P} = -\frac{Mg_0R_T^2}{RT}\frac{dz}{(R_T+z)^2}$$

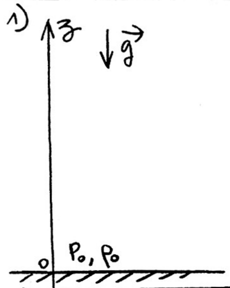
$$\mapsto \int_{z=0}^{z}\frac{dP}{P} = -\frac{Mg_0R_T^2}{R.T}\int_0^z\frac{dz}{(R_T+z)^2}$$

$$\longrightarrow \ln\frac{P(z)}{P_0} = +\frac{Mg_0R_T^2}{R.T}\left|\frac{1}{R_T+z}\right|_0^z$$

$$\mapsto \boxed{\ln\frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mg_0R_T^2}{R.T}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+z}\right)}$$

EXT2-4 : Atmosphère Polytropique :

l'air étant assimilé à un GP on a tjs $PV = nRT$



RFSF $\overrightarrow{grad}P = -\vec{f_v} = -\rho g\vec{e_z} \longrightarrow \dfrac{dP}{dz} = -\rho g$ avec $\rho = \rho(z)$

Atmosphère Polytropique : $\dfrac{P(z)}{\rho(z)^k} = cte = \dfrac{P_0}{\rho_0^k} \rightarrow \rho^k = \dfrac{\rho_0^k}{P_0}P(z)$

d'où $\dfrac{dP}{dz} = -\rho g = -\rho_0 g\left(\dfrac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}}$

soit $\dfrac{dP}{P^{\frac{1}{k}}} = -\dfrac{\rho_0 g}{P_0^{\frac{1}{k}}}dz$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{k}{k-1}\left(P^{1-\frac{1}{k}} - P_0^{1-\frac{1}{k}}\right) = -\dfrac{\rho_0 g z}{P_0^{\frac{1}{k}}}}$ (*) ce qui donne P si on connait g, k, P_0, ρ_0 et z

on a $\dfrac{P}{\rho^k} = \dfrac{P_0}{\rho_0^k} \rightarrow \dfrac{P^{\frac{1}{k}}}{\rho} = \dfrac{P_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \rightarrow P^{-\frac{1}{k}} = P_0^{-\frac{1}{k}}\dfrac{\rho_0}{\rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\rho_0}{P_0^{\frac{1}{k}}}$

$(*) \rightarrow \dfrac{k}{k-1}\left[\dfrac{P}{\rho} - \dfrac{P_0}{\rho_0}\right] = -gz$ or $PV = nRT \rightarrow \boxed{P = \dfrac{m}{V}\dfrac{RT}{M} = \rho\dfrac{RT}{M}}$

$\rightarrow \dfrac{kR}{(k-1)M}\left(T - T_0\right) = -gz$ soit $\boxed{T(z) = -\dfrac{k-1}{k}\dfrac{Mgz}{R} + T_0}$

Ainsi $T(z)$ est une f° affine de z : le modèle de l'atmosphère polytropique est le modèle le plus simple prenant en compte les variations de la température avec l'altitude.

$\dfrac{dT}{dz} = -\dfrac{(k-1)Mg}{kR} = cte$

d'où $k\left[\dfrac{dT}{dz} + \dfrac{Mg}{R}\right] = \dfrac{Mg}{R}$

soit $k = \dfrac{Mg}{R}\dfrac{1}{\dfrac{dT}{dz} + \dfrac{Mg}{R}} = \dfrac{29.10^{-3}.9{,}81}{8{,}314}\cdot\dfrac{1}{-7.10^{-3} + \dfrac{29.10^{-3}.9{,}81}{8{,}314}} = 1{,}26$ $\quad\boxed{k = 1{,}26}$