

■ Applications directes du cours

Ex-T3.1 Vrai/Faux

Justifier les réponses et rectifier les affirmations fausses si possible.

- 1) L'énergie interne d'un gaz ne dépend que de la température.
- 2) Au cours d'une transformation monobare entre deux états d'équilibre, le transfert thermique est égal à la variation d'enthalpie.
- 3) La température d'un corps pur augmente quand on lui fournit un transfert thermique ($Q > 0$).
- 4) La température d'un système isolé reste constante.
- 5) La loi de Laplace est valable pour une adiabatique.
- 6) Un système fournit adiabatiquement du travail :
 - a) Sa température ne varie pas.
 - b) Son énergie interne diminue.

Rép : 1) Faux. Le gaz doit être soit parfait ou au moins un gaz de Joule ; 2) Vrai ; 3) Faux. Par exemple au cours d'une détente isotherme d'un GP, le gaz fournit du travail, reçoit du transfert thermique, et sa température ne varie pas ; 4) Faux. D'après le premier principe $\delta U = 0$, mais U n'est pas fonction que de la température en général, donc T n'est pas forcément constante. Pour GP en revanche, le résultat est vrai (1^e loi de Joule) ; 5) Faux. Il faut que l'adiabatique soit quasistatique et mécaniquement réversible ; 6.a) Faux. Une adiabatique n'est *pas* une isotherme ; 6.b) Vrai : $W < 0$ et $Q = 0$.

Ex-T3.2 Calculs de W et Q (Expressions à savoir établir rapidement / connaître)

Dans le cas d'un gaz parfait, rappeler les expressions de ΔU et ΔH puis exprimer les travaux W et transferts thermiques Q pour les transformations suivantes en fonction de γ , n , R , V , T et P . On notera $\{P_1, V_1, T_1\}$ l'état initial du gaz parfait subissant la transformation et $\{P_2, V_2, T_2\}$ son état final.

Rép : ► Sol. p. 14

■ Bilans énergétiques et transformations thermodynamiques

Ex-T3.3 Vitesse des « baffes » d'Obélix

Imaginez qu'Obélix vous gifle ! Vous ressentez une rougeur à la joue. La température de la région touchée a varié de $1,8^\circ\text{C}$.

En supposant que la masse de la main qui vous atteint est de $1,2\text{ kg}$ et que la masse de la peau rougie est de 150 g , estimez la vitesse de la main juste avant l'impact, en prenant comme valeur de la capacité thermique massique de la peau de la joue : $c_{\text{joue}} = 3,8\text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Rép : $v = \sqrt{\frac{2m_{\text{joue}}c\Delta T}{m_{\text{main}}}} = 41,4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 149\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$



Ex-T3.4 Chauffage d'un gaz à l'aide d'un élément électrique

Soit un système piston-cylindre contenant $V_1 = 0,5\text{ m}^3$ d'azote à $P_1 = 400\text{ kPa}$ et à $\theta_1 = 27^\circ\text{C}$.

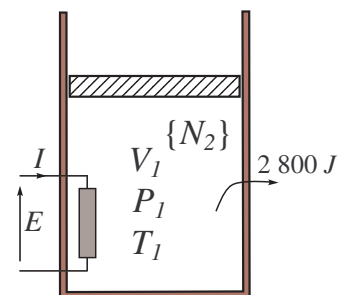
L'élément chauffant électrique est allumé, et un courant $I = 2\text{ A}$ y circule pendant $\tau = 5\text{ min}$ sous la tension $E = 120\text{ V}$.

L'azote se détend de manière isobare. Au cours de cette transformation, l'ensemble {gaz, cylindre, élément chauffant} cède à l'extérieur un transfert thermique $Q_{\text{ext}} = 2800\text{ J}$.

Déterminer la température finale T_2 de l'azote.

Données : $M(N_2)$ est supposée connue ; capacité thermique massique à pression constante du diazote : $c_P = 1,039\text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Rép : $T_2 = 329,7\text{ K}$



Solution Ex-T3.2**Propriétés :**

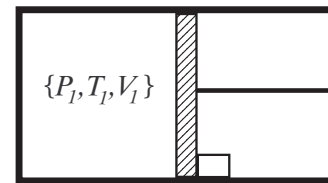
- La 1^e loi de Joule s'applique *quelle que soit la transformation* : $\Delta U_{GP} = C_V \cdot \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot \Delta T$
- La 2^e loi de Joule s'applique *quelle que soit la transformation* : $\Delta H_{GP} = C_P \cdot \Delta T = \frac{\gamma \cdot nR}{\gamma - 1} \cdot \Delta T$

Rq : On a donc toujours, *pour un Gaz Parfait* : $\Delta H_{GP} = \gamma \cdot \Delta U_{GP}$

Transf ^o	W	Q
Isobare	$W = -P_1 \Delta V$	$Q = \Delta H = C_P \cdot \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \cdot (T_2 - T_1)$
Isotherme	$W = -nR \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nR \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$	$Q = \Delta U - W$
Isochore	$W = 0$	$Q = \Delta U = C_V \cdot \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot (T_2 - T_1)$
Adiabatique	$W = \Delta U = C_V \cdot \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot (T_2 - T_1)$	$Q = 0$

Ex-T3.5 Transformation adiabatique

Un Gaz Parfait monoatomique est enfermé dans un cylindre fermé par un piston dans les conditions $\{P_1, T_1, V_1\}$. L'ensemble est adiabatique. La pression atmosphérique, notée P_0 , est telle que $P_0 > P_1$. On libère brusquement le piston.



1) La transformation est-elle seulement adiabatique? Exprimer le travail des forces pressantes qu'il reçoit en fonction de P_0 , V_1 et V_F , volume final qu'il occupe.

2) Donne l'expression qui relie les variations d'énergie interne ΔU et d'enthalpie ΔH au coefficient γ . Quelle est la valeur de γ pour le gaz parfait considéré? En déduire ΔU et ΔH en fonction des seules données P_1 , V_1 , T_1 et T_F , température finale du gaz parfait.

3) Exprimer V_F et T_F à l'équilibre final en fonction des seules données P_1 , V_1 , T_1 et P_0 .

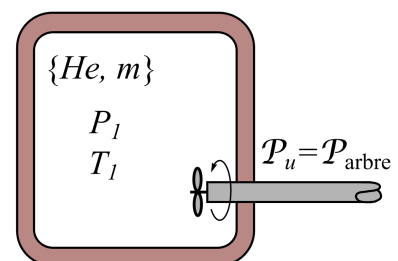
Rép : 1) $W = -P_0(V_F - V_1)$; 2) $\Delta U = \Delta U_{GPM} = \frac{3}{2} \frac{P_1 V_1}{T_1} (T_F - T_1)$ et $\Delta H = \gamma \Delta U$; 3) $V_F = \frac{2P_0 + 3P_1}{5P_0} V_1$ et $T_F = \frac{2P_0 + 3P_1}{2P_1} T_1$

Ex-T3.6 Utilisation d'un agitateur

Un réservoir rigide et adiabatique (calorifugé) contient $m = 1 \text{ kg}$ d'hélium à la température $T_1 = 300 \text{ K}$ et à la pression $P_1 = 300 \text{ kPa}$.

L'hélium est brassé à l'aide d'un agitateur de puissance utile 15 W . On le fait fonctionner pendant $\tau = 30 \text{ min}$. Déterminer la température finale T_2 et la pression finale P_2 de l'hélium.

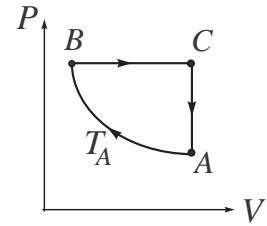
Donnée : capacité thermique (moy.) à volume constant de l'hélium : $c_V = 3,1156 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.



Rép : $T_2 = 308,7 \text{ K}$; $P_2 = 308,7 \text{ kPa}$

Ex-T3.7 transformation cyclique

Une mole de GPM contenue dans un cylindre décrit de manière quasi-statique et mécaniquement réversible le cycle ABCA décrit ci-contre. L'évolution AB est isotherme à la température $T_A = 301 \text{ K}$. En A, $P_A = 1,0 \text{ bar}$. L'évolution BC est isobare à la pression $P_B = 5,0 \text{ bars}$. L'évolution CA est isochore.



- 1) Calculer les volumes V_A , V_B et V_C et la température T_C .
- 2) Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

Rép : 1) $V_A = V_C = 25 \text{ L}$; $V_B = 5 \text{ L}$; $T_C \simeq 1500 \text{ K}$; 2) $W_{AB} = -RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 4,03 \text{ kJ}$; $Q_{AB} = -W_{AB}$; $W_{BC} = P_B(V_A - V_C) = -10 \text{ kJ}$; $Q_{BC} = \Delta U_{BC} - W_{BC} = 25 \text{ kJ}$; $W_{CA} = 0 \text{ J}$; $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = C_{Vm}(T_A - T_C) = -15 \text{ kJ}$ — on vérifie que $\Delta U_{\text{cycle}} = U_A - U_A = 0$ car $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0$.

Ex-T3.8

Une mole de gaz réel monoatomique d'équation d'état $\left(P + \frac{a}{V^2}\right) V = RT$ et d'énergie interne

$U = \frac{3RT}{2} - \frac{a}{V}$ décrit le même cycle que dans l'Ex-T3.7.

On donne $T_A = 301 \text{ K}$; $V_A = 5,0 \text{ L}$; $V_B = 0,50 \text{ L}$ et $a = 0,135 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$.

- 1) Calculer P_A , P_B , P_C et T_C .
- 2) Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

Rép : 1) $P_A = 4,95 \text{ bars}$, $P_B = P_C = 44,6 \text{ bars}$ et $T_C = 2688 \text{ K}$; 2) $W_{AB} = RT_A \ln \frac{V_A}{V_B} + a\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}\right) = 5,52 \text{ kJ}$; $Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -5,76 \text{ kJ}$; $W_{BC} = P_B(V_B - V_C) = -20,1 \text{ kJ}$; $Q_{BC} = 50,1 \text{ kJ}$; $W_{CA} = 0 \text{ kJ}$; $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{3}{2}R(T_A - T_C) = -29,8 \text{ kJ}$

Ex-T3.9 Comparaison de deux évolutions possibles entre deux états

Un récipient de volume $V_A = 5 \text{ L}$ fermé par un piston contient $n = 0,5 \text{ mol}$ de gaz parfait, initialement à la température $T_A = 287 \text{ K}$. On porte de façon quasi statique le volume du gaz à une valeur $V_B = 20 \text{ L}$, à la température $T_B = 350 \text{ K}$. On donne pour ce gaz le coefficient $\gamma = 1,4$. Le passage de A à B s'effectue de deux manières différentes :

- évolution (a) ($A \rightarrow C \rightarrow B$) : chauffage isochore de 287 K à 350 K (transformation $A \rightarrow C$) puis détente isotherme de V_A à V_B à la température $T_1 = 350 \text{ K}$ (transformation $C \rightarrow B$);
- évolution (b) ($A \rightarrow D \rightarrow B$) : détente isotherme de V_A à V_B à la température $T_2 = 287 \text{ K}$ (transformation $A \rightarrow D$) puis chauffage isochore de 287 K à 350 K (transformation $D \rightarrow B$).

- 1) Représenter les deux évolutions précédentes en coordonnées de Clapeyron (= dans le diagramme (P, V)).
- 2) Exprimer puis calculer le travail $W_{(a)}$ et le transfert thermique $Q_{(b)}$ reçus par le gaz ainsi que la variation d'énergie interne $\Delta U_{(a)}$ du gaz lors de la première série de transformations.
- 3) Exprimer puis calculer le travail $W_{(b)}$ et le transfert thermique $Q_{(b)}$ reçus par le gaz ainsi que la variation d'énergie interne $\Delta U_{(b)}$ du gaz lors de la seconde série de transformations.
- 4) Comparer les deux possibilités d'évolution de A à B. Conclusion ?

Rép : 2) $W_{(a)} = nRT_1 \ln \frac{V_A}{V_B} = -2017 \text{ J}$; $\Delta U_{(a)} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) = 655 \text{ J}$; $Q_{(a)} = \Delta U_{(a)} - W_{(a)} = nR\left(\frac{T_1 - T_2}{\gamma-1} - T_1 \ln \frac{V_A}{V_B}\right) = 2672 \text{ J}$; 3) $W_{(b)} = -1654 \text{ J}$; $\Delta U_{(b)} = \Delta U_{(a)}$; $Q_{(b)} = \Delta U_{(b)} - W_{(b)} = 2309 \text{ J}$; 4) $\Delta U_{(b)} = \Delta U_{(a)}$ puisque la variation d'une fonction d'état entre deux états thermodynamiques données ne dépend pas du « chemin » suivi pour aller de l'état initial à l'état final. Par contre, le travail et le transfert thermiques, qui ne sont pas des fonctions d'états, caractérisent les transformations entre A et B : $W_{(a)} \neq W_{(b)}$ et $Q_{(a)} \neq Q_{(b)}$.

Ex-T3.10 Gaz de Joule et Détente de Joule-Gay Lussac

Soit une masse m d'un gaz réel satisfaisant à l'équation d'état : $P(V - b) = nRT$ avec $b =$

5.10^{-6} m^3 . On donne deux états de cette masse : $\{P_2 = 50 \text{ bars}, V_2 = 4,57.10^4 \text{ m}^3\}$ et $\{P_1 = 500 \text{ bars}, V_1\}$.

- 1) Exprimer les coefficients thermoélastiques α et χ_T (\rightarrow Cf Cours T1). Comparer avec les expressions obtenues pour le gaz parfait.
- 2) Un tel gaz est appelé gaz de Joule car il vérifie la première loi de Joule. La rappeler.
- 3) Ce gaz est situé dans un cylindre rigide adiabatique à deux compartiments inégaux, dont il occupe le compartiment (1), le vide régnant dans le compartiment (2). On perce un trou entre les deux compartiments. Le gaz passe des conditions initiales $\{P_1, V_1, T_1\}$ aux conditions finales $\{P_2, V_2, T_2\}$ (avec V_2 le volume total (1)+(2)). \rightarrow (a) Calculer la variation d'énergie interne ; (b) en déduire T_2 littéralement puis V_1 numériquement.

Rép : 1) $\alpha = \frac{1}{T}$ et $\chi_T = \frac{1}{V} \frac{V-b}{P}$; 3) $V_1 = 4,52.10^{-5} \text{ m}^3$.

Ex-T3.11 Transformations adiabatiques

Une mole de GP de capacité thermique molaire à volume constant $C_m = \frac{5}{2} R$ est enfermé dans un cylindre vertical calorifugé fermé par un piston mobile calorifugé de section $S = 0,01 \text{ m}^2$ en contact avec une atmosphère extérieure à la pression constante $P_0 = 1 \text{ bar}$.

- 1) On pose sur le piston une masse $M = 102 \text{ kg}$ et on laisse le système évoluer. Déterminer la pression P_1 et la température T_1 lorsqu'on a atteint le nouvel équilibre (état 1).
- 2) À partir de l'état 1, on enlève la masse M et on laisse le système évoluer. Déterminer la pression P_2 et la température T_2 lorsqu'on a atteint le nouvel état d'équilibre (état 2).

Rép : 1) $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$; $T_1 = \frac{9}{7}T_0$; 2) $P_2 = P_0$ et $T_2 = \frac{54}{49}T_0$

T3

■ Calorimétrie

Ex-T3.12 Calorimétrie pratique

On veut remplir une baignoire de 100 litres d'eau à 32°C . On dispose pour cela de deux sources, l'une d'eau froide à 18°C , l'autre d'eau chaude à 60°C .

Si on néglige la capacité thermique de la baignoire et les diverses pertes thermiques, quel volume doit-on prélever à chacune des deux sources ?

Donnée : la masse volumique de l'eau est censée être connue...☺

Rép : $V_{\text{eau chaude}} = 33,3 \text{ L}$

Ex-T3.13 Échanges thermiques dans un calorimètre

Un calorimètre de capacité calorifique $C_{cal} = 209 \text{ J.K}^{-1}$ contient une masse d'eau $m = 300 \text{ g}$ à la température $\theta = 18^\circ\text{C}$ en équilibre thermique avec le vase intérieur. On introduit alors les masses : (1) $m_1 = 50 \text{ g}$ de cuivre à $\theta_1 = 30^\circ\text{C}$, (2) $m_2 = 30 \text{ g}$ de plomb à $\theta_1 = 80^\circ\text{C}$ et (3) $m_3 = 80 \text{ g}$ de fer à $\theta_1 = 50^\circ\text{C}$.

\rightarrow Quelle est la température finale θ_f d'équilibre (la donner en degrés Celsius et en degré Kelvin) ?

Données : les capacités thermiques massiques sont : $c_{\text{Pb}} = 129,5 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$; $c_{\text{Fe}} = 452 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$; $c_{\text{Cu}} = 385 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$; $c_{\text{eau}} = 4185 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

Rép : $\theta_f = 19^\circ\text{C}$, $T_f = 292 \text{ K}$

Ex-T3.14 Fuites thermiques

Un récipient et le liquide qu'il contient ont une capacité thermique totale C . L'ensemble se refroidit au contact de l'atmosphère extérieure de température T_e . T_0 est la température initiale du système, T la température à l'instant t . La puissance de fuite est proportionnelle à l'écart entre la température du récipient et la température extérieure. Soit a , le coefficient de proportionnalité ($a > 0$).

- 1) Donner l'expression de δQ le transfert thermique reçu par le récipient pendant dt .
- 2) Déterminer $T(t)$.
- 3) AN : $T_0 = 20^\circ$, $T_e = 10^\circ$, au bout d'une minute, $T = 19,5^\circ$. Calculer le temps τ au bout duquel elle sera de 15° .

Rép : 2) $T = (T_0 - T_e).exp(-\frac{a.t}{C}) + T_e$; 3) $\tau = 13,5 \text{ min}$

■ Mécanique et thermodynamique

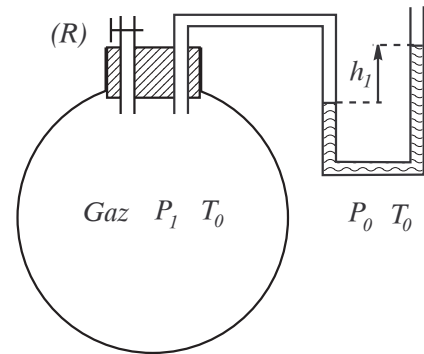
Ex-T3.15 Expérience de Clément-Desormes : détermination expérimentale de γ (*)

On considère un ballon rempli d'un gaz parfait à une pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique P_0 : le liquide manométrique dans le tube en U présente une dénivellation h_1 .

On ouvre le robinet pendant une durée brève, la dénivellation du liquide devenant nulle.

Le robinet fermé, on attend que s'établisse l'équilibre thermique : celui-ci correspond à une dénivellation h_2 du liquide.

→ Montrer que : $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$



Conseil : raisonner sur les n moles restant dans le ballon après la fuite. Lors de la fuite, ces n moles subissent une détente rapide qui pourra être considérée comme adiabatique. De plus comme $P_1 \cong P_0$, on pourra la considérer pratiquement quasi-statique et mécaniquement réversible.

Ex-T3.16 Méthode de Rückhardt

Soit un gaz parfait occupant un volume V_0 (de l'ordre de 10 L) d'un récipient surmonté d'un tube de verre (d'une longueur de 50 cm environ) et de section faible S .

Considérons une bille d'acier, de masse m , susceptible de glisser le long du tube de verre.

Cette bille se trouve en équilibre mécanique en un point O .

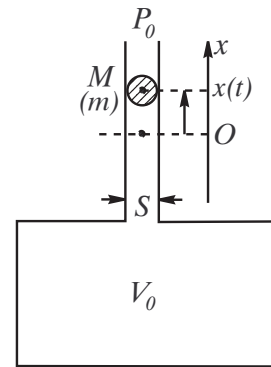
1) Quelle est la pression P'_0 du gaz à l'intérieur du récipient (en notant P_0 la pression atmosphérique et g l'intensité du champ de pesanteur) ?

2) On écarte la bille de x_0 , à partir de O , à l'instant $t = 0$, et on la lâche sans lui communiquer de vitesse initiale. x_0 est suffisamment faible pour avoir $x_0 S \ll V_0$.

→ En négligeant les frottements ('fluides' comme 'solide'), établir l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$. On supposera que la transformation du gaz est adiabatique quasi-statique.

→ Indiquer la période T des oscillations et en déduire l'expression de γ en fonction des paramètres expérimentaux.

→ Exprimer x en fonction de t .



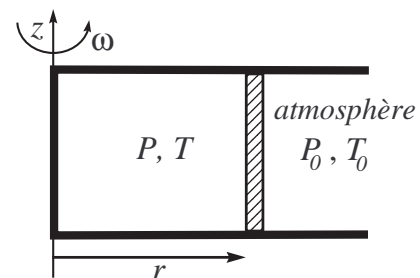
Rép : 1) $P'_0 = P_0 + \frac{mg}{S}$; 2) Justifier que $PV^\gamma = \text{Cte}$, effectuer la différentielle logarithmique de cette relation et en déduire que $dP \simeq -\frac{\gamma P'_0 S}{V_0} x(t)$. L'application du PDF à la bille, après y avoir fait apparaître dP , conduit à $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_0}{\gamma P'_0 S^2}}$

Ex-T3.17 Piston en rotation autour d'un axe

Un cylindre calorifugé est mis en rotation de manière progressive à partir de la vitesse nulle jusqu'à la vitesse angulaire ω (qui restera constante) autour d'un axe vertical. Un piston mobile de masse m et de section S glisse sans frottement à l'intérieur du cylindre; il emprisonne une quantité d'air initialement caractérisée par les conditions $\{P_0, T_0, V_0\}$. L'air sera considéré comme un gaz parfait.

1) Déterminer la pression finale P_f du gaz si l'on admet qu'il a subi une transformation quasi-statique réversible lorsque le piston s'est déplacé de sa position initiale caractérisée par r_0 jusqu'à sa position d'équilibre caractérisée par r_f .

2) En déduire la vitesse angulaire ω et la température finale T_f du gaz.



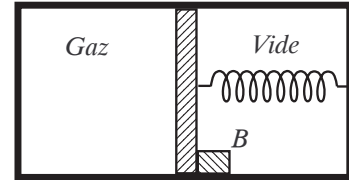
3) Données : $P_0 = 1013 \text{ hPa}$; $S = 10 \text{ cm}^2$; $r_0 = 10 \text{ cm}$; $r_f = 12 \text{ cm}$; $m = 1 \text{ kg}$; $T_0 = 293 \text{ K}$ et $\gamma = 1,4$. → Calculer numériquement P_f , T_f et ω .

Rép : **1)** $P_f = P_0(\frac{r_0}{r_f})^\gamma$; **2)** $T_f = T_0(\frac{r_0}{r_f})^{\gamma-1}$; **3)** $P_f = 0,785 \text{ bar}$; $T_f = 272 \text{ K}$ et $\omega = 13,8 \text{ rad.s}^{-1}$.

Ex-T3.18 cas d'une Force extérieure conservative (*)

On considère un piston calorifugé mobile dans un cylindre calorifugé horizontal de section constante $S = 500 \text{ cm}^2$.

Le compartiment de gauche contient $n = 0,01 \text{ mole}$ d'un GP de coefficient $\gamma = 1,40 = \frac{7}{5}$ et le compartiment de droite est soumis à un vide poussé. Le piston est relié par un ressort de raideur $k = 10^{14} \text{ N.m}^{-1}$.



1) Initialement, le piston est coincé par une butée B , le ressort n'est pas tendu, la pression du gaz vaut $P_0 = 0,241 \text{ bar}$ et sa température $T_0 = 290 \text{ K}$. Calculer le volume V_0 occupé initialement par le gaz.

2) On supprime la butée B . Le système évolue vers un nouvel état d'équilibre. On cherche à déterminer l'allongement final du ressort, x_F , le volume final du gaz, V_F , sa pression finale, P_F , sa température finale, T_F , et le travail W qu'il a reçu.

2.a) En appliquant le PFD au piston au repos dans l'état final, donner la relation entre P_F , S , k et x_F .

2.b) Quelle est l'expression de l'équation d'état du GP dans l'état final ?

2.c) Appliquer le Premier Principe au GP (en fait {GP+piston}) et en déduire une relation entre T_F , T_0 , n , γ , k et x_F .

2.d) Quelle est la relation liant le volume final V_F avec V_0 , x_F et S ?

2.e) Déduire des quatre équations précédentes que la pression P_F est solution de l'équation :

$$P_F^2 + \frac{5}{6} \frac{kV_0}{S^2} P_F - \frac{5}{6} nRT_0 \frac{k}{S^2} = 0$$

2.f) En déduire les valeurs des grandeurs recherchées.

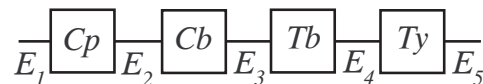
Rép : **1)** $V_0 = 1 \text{ L}$; **2)** $P_F \simeq 7450 \text{ pa}$; $V_F = 2,86 \text{ L}$; $T_F = 256 \text{ K}$; $x_F = 3,72 \text{ cm}$; $W_{\text{forces pressantes}} = 0 \text{ J}$; $W_{\text{ressort}} = -\Delta\mathcal{E}_{p,\text{él}} \simeq -7 \text{ J}$

T3

■ **Systèmes ouverts**

Ex-T3.19 Turboréacteur (**)

Un turboréacteur destiné à la propulsion d'avions est schématisé ci-contre :



- l'air est comprimé dans le compresseur (C_p) calorifugé où il évolue de l'état E_1 à l'état E_2 ;

- puis l'air traverse une chambre de combustion (C_b) où il subit un réchauffement isobare de l'état E_2 à l'état E_3 ;

- l'air se détend ensuite dans une turbine (T_b) calorifugée où il évolue de l'état E_3 à l'état E_4 ;

- enfin l'air traverse une tuyère (T_y), conduite de section variable où il acquiert une vitesse importante c_5 et évolue de l'état E_4 à l'état E_5 .

État	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
P en bars	1,0	5,0	5,0	2,5	1,0
T en K	288	$T_2 = ?$	1 123	955	735

Les données concernant les différents états sont résumés dans le tableau ci-contre.

L'installation fonctionne en régime stationnaire. On néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur dans toute l'installation. On néglige l'énergie cinétique de l'air partout sauf dans l'état E_5 à la sortie de la tuyère, où la vitesse de l'air vaut c_5 .

L'air est assimilé à un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. On rappelle que $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1) Soit (Σ) le système ouvert constitué par le gaz contenu dans la tuyère (T_y) et (Σ^*) le système fermé associé constitué à l'instant t par (Σ) et par la masse dm d'air qui va entrer dans la tuyère

entre les instants t et $t + dt$, et constitué à l'instant $t + dt$ par (Σ) et par la masse dm d'air qui est sortie de la tuyère entre les instants t et $t + dt$.

En appliquant le premier principe à (Σ^*) , calculer la vitesse c_5 de l'air à la sortie de la tuyère.

2) En raisonnant de manière analogue, exprimer les travaux w_{Cp} et w_{Tu} correspondant au transfert d'un kilogramme d'air respectivement dans le compresseur et dans la turbine en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4 . Sachant que le travail récupéré dans la turbine sert exactement à entraîner le compresseur, calculer T_2 .

3) En raisonnant comme à la question 1), calculer le transfert thermique q correspondant au transit d'un kilogramme d'air dans la chambre de combustion. En déduire le rendement thermodynamique du turboréacteur défini par : $r = \frac{1}{2} \frac{c_5^2}{q}$

Rép : **1)** $c_5 = \sqrt{2c_P(T_4 - T_5)} = 6,6 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$; **2)** $w_{Cp} = c_P(T_2 - T_1)$; $w_{Tu} = c_P(T_4 - T_3)$; $T_2 = 456 \text{ K}$; **3)** $q = c_P(T_3 - T_2) = 667 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $r = 33\%$.

Ex-T3.20 Géométrie d'une Tuyère (**)

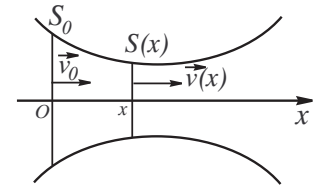
Soit une tuyère avec un écoulement permanent adiabatique d'un gaz parfait :

1) Montrer que : $v^2(x) - v_0^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} (T_0 - T(x))$ ①

2) Montrer que : $\frac{dT}{dx} = -\frac{(\gamma - 1)T}{Sv} \frac{d(Sv)}{dx}$ ②

3) Déduire des questions précédentes que :

$$\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ (vitesse du son).}$$



Rq : pour un écoulement subsonique ($v < c$), il faut que la tuyère soit convergente si on veut que la vitesse augmente avec x .

Indications : **1)** Se ramener à un système fermé pour établir le 1P Industriel (\rightarrow Cf Ex-T3.19); **2)** Bien que la vitesse d'écoulement soit élevée en sortie (c'est le rôle d'une tuyère), on peut faire l'hypothèse que l'écoulement adiabatique se ramène à la transformation adiabatique QS* d'une masse dm entre l'état $\{V_0, T_0\}$ et l'état $\{V(x), T(x)\}$. Le gaz étant supposé parfait, on peut alors appliquer la loi de Laplace $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$, avec $V(x) = Sv(x)dt$ pour la masse dm de gaz sortant de la tuyère entre t et $t + dt$; **3)** Dériver ① par rapport à x et y « injecter » ②.

■ Détentes

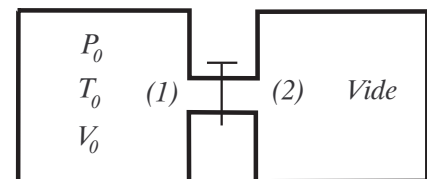
T4

Ex-T4.1 Les deux réservoirs ont le même volume V_0 et l'ensemble est adiabatique. On entrouvre le robinet : le gaz parfait restant dans le compartiment (1) a subi une détente quasi-statique.

Déterminer l'état final et décrire le chemin suivi pendant la transformation, dans les deux cas suivants :

(a) les deux réservoirs sont thermiquement isolés l'un de l'autre (ce qui revient à négliger le transfert thermique entre les gaz se trouvant dans (1) et (2) à l'état final);

(b) Les deux réservoirs sont en contact thermique.



Rép : **(a)** $n_1 = n_2^{-\frac{1}{\gamma}}$; $T_2 = \frac{T_0}{2(1 - 2^{-\frac{1}{\gamma}})}$

Ex-T4.2 Détente d'un gaz réel donné par $S(U, V)$

Dans le domaine de températures et de pressions considéré, une mole de gaz monoatomique de sphères dures est décrit par la fonction caractéristique :

$$S_m(U_m, V_m) = \frac{S}{n} = S_{m0} + \frac{3}{2} R \ln \left(\frac{U_m}{U_{m0}} \right) + R \ln \left(\frac{V_m - b}{V_{m0} - b} \right)$$

où S_{m0} , U_{m0} et V_{m0} désignent respectivement l'entropie, l'énergie interne et le volume molaires dans un état de référence, et où $b = 2.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$ et $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1) Une mole de ce gaz est initialement en équilibre dans un cylindre parfaitement calorifugé de volume V_{Im} , à la température $T_I = 300 \text{ K}$. On réalise une détente réversible faisant passer le volume du cylindre de $V_{Im} = 10b$ à $V_{Fm} = 20b$.

→ Déterminer la pression initiale, la température finale et le travail W_m reçu par le gaz.

2) On réalise une détente de Joule-Gay Lussac d'une mole de ce gaz : initialement le gaz occupe un volume $V_{Im} = 10b$ et sa température vaut $T_I = 300 \text{ K}$. Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume $V_{Fm} = 20b$.

→ Déterminer la température finale, la pression finale et l'entropie molaire créée. Commenter.

Rép : 1) $P_I = 138,6 \text{ bars}$; $T_F = T_I \left(\frac{V_{mF} - b}{V_{mI} - b} \right)^{\frac{3}{2}} = 182 \text{ K}$; $W_m = -1,47 \text{ kJ.mol}^{-1}$;

2) ${}^c S_m = R \ln \frac{V_{mF} - b}{V_{mI} - b} = 6,21 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Ex-T4.3 Détente de Joule-Gay Lussac de la vapeur d'eau

On réalise une détente de Joule-Gay Lussac dans un récipient calorifugé constitué de deux compartiments de volumes respectifs V_1 et $V_2 - V_1$ reliés par un robinet (R).

Initialement, une mole de vapeur d'eau est contenue dans le récipient de gauche dans l'état E_1 $\{P_1 = 100 \text{ bars}, T_1 = 773 \text{ K}, V_1 = 5,90.10^{-4} \text{ m}^3, U_1 = 54,78 \text{ kJ}, S_1 = 6,594 \text{ kJ.K}^{-1}\}$ et le compartiment de droite est vide.

On ouvre le robinet (R), la vapeur d'eau occupe le volume total V_2 ; on mesure alors $T_2 = 753 \text{ K}$.

1) La vapeur d'eau est-elle assimilable à un GP au cours de la détente ?

Déterminer les caractéristiques $\{P_2, T_2, V_2, U_2, S_2\}$ de l'état final en utilisant l'extrait des tables de la vapeur d'eau (grandeurs molaires) à la température $T_2 = 753 \text{ K}$:

P en bars	40	46	52	58	64	70
V_m en $\text{m}^3.\text{mol}^{-1}$	$1,51.10^{-3}$	$1,31.10^{-3}$	$1,15.10^{-3}$	$1,02.10^{-3}$	$9,23.10^{-4}$	$8,39.10^{-4}$
U_m en kJ.mol^{-1}	55,14	55,04	54,96	54,80	54,70	54,59
S_m en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$	6,963	6,890	6,825	6,766	6,712	6,662

2) Calculer l'entropie créée au cours de l'évolution et commenter.

Rép : 1) $P_2 \simeq 59,2 \text{ bars}$; $V_2 \simeq 1,001.10^{-3} \text{ m}^3$; $S_2 \simeq 6,755 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$;

2) $\Delta S = {}^c S \simeq 161 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

T4

■ Bilans entropiques

Ex-T4.4

Les deux compartiments contiennent le même gaz parfait initialement dans le même état $\{P_0, T_0, V_0\}$. Les parois sont calorifugées ainsi que le piston. Ce dernier se déplace sans frottement dans le cylindre.

On fait passer un courant I dans la résistance R de telle sorte que la transformation du gaz puisse être considérée comme quasi-statique, et jusqu'à ce que la pression devienne P_f .

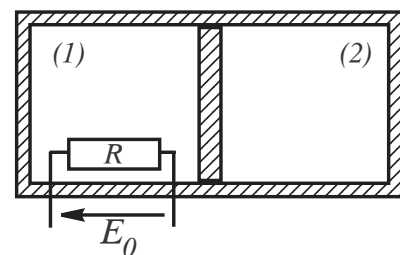
1) Déterminer l'état thermodynamique du gaz dans chaque compartiment.

2) Donner l'expression de l'énergie fournie par le générateur qui alimente la résistance.

3) Calculer la variation d'entropie du système complet (résistance incluse).

Rép : 1) $V_2 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$; $T_2 = T_0 \left(\frac{P_f}{P_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$; $T_1 = T_0 \left(2 \frac{P_f}{P_0} - \left(\frac{P_f}{P_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right)$;

2) $W_{\text{élec}} = nC_{Vm}(T_1 + T_2 - 2T_0)$; 3) $\Delta S = nC_{Vm} \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_1}{V_0}$.



Ex-T4.5 Entropie de mélange

Considérons un cylindre parfaitement isolé, séparé en deux compartiments de volume V_0 , par une paroi escamotable.

Initialement, chaque compartiment contient un GP à la même température T_0 . Supposons que l'un renferme de l'hélium (n_1 moles, $C_{Vm1} = \frac{3}{2}R$) et l'autre du dihydrogène (n_2 moles, $C_{Vm2} = \frac{5}{2}R$).

Supprimons la paroi escamotable; on atteint un nouvel état d'équilibre caractérisé par : $V_F = 2V_0$, P_F et T_F , les deux gaz, par diffusion, constituant un GP unique.

- 1) Calculer P_F et T_F .
- 2) Effectuer un bilan entropique pour cette transformation.

Rép : 1) $T_F = T_0$; $P_F = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$; 2) $\Delta S = (n_1 + n_2)R \ln 2$.

Ex-T4.6 Système Glace/Eau liquide dans un calorimètre

Dans un vase parfaitement calorifugé de capacité thermique $C = 120 J.K^{-1}$, on verse $m_1 = 200 g$ d'eau de capacité thermique massique $c_e = 4185 J.K^{-1}.kg^{-1}$. la température d'équilibre s'établit à $t_1 = 18^\circ C$.

On y introduit alors un cube de glace de masse $m_2 = 72 g$ pris initialement à la température $t_2 = -10^\circ C$ et on agite jusqu'à obtention d'un nouvel équilibre thermique.

La capacité thermique massique de la glace est $c_g = 2090 J.K^{-1}.kg^{-1}$; et la chaleur latente de fusion est, à $0^\circ C$ et sous la pression atmosphérique normale : $L_f = 333 kJ.kg^{-1}$.

- 1) Déterminer, lorsque l'équilibre est atteint, la température finale T_0 et faire un bilan *glace/eau*.
- 2) Calculer (littéralement et numériquement) la variation d'entropie, pour le système { eau liquide + glace + calorimètre }, consécutive à l'introduction de la glace.

Rép : 2) $\Delta S = (C + m_1 c_e) \ln \frac{T_0}{T_1} + m_2 c_g \ln \frac{T_0}{T_2} + \frac{x L_f}{T_0}$.

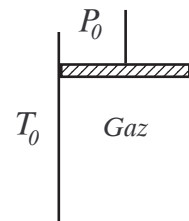
Ex-T4.7 Deux transformations monothermes

Un gaz parfait se trouve dans un cylindre à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable.

On note P_0 et T_0 la pression et la température de l'atmosphère extérieure.

Initialement, le gaz, à la température $T_1 = T_0$, occupe un volume V_1 .

Données : $P_0 = 1 \text{ bar}$; $V_1 = 5.10^{-3} m^3$; $R = 8,32 J.K^{-1}.mol^{-1}$; $T_0 = 293 K$ et $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$ (supposé indépendant de la température, C_P et C_V étant les capacités thermiques isobare et isochore).



- 1) La paroi du cylindre est conductrice de la chaleur (paroi *diathermane*).

En appuyant sur le piston, un opérateur augmente très lentement la pression jusqu'à $P_2 = 10 \text{ bars}$. Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume V_2 à la température T_2 .

- 1.a) Calculer V_2 et T_2 .

1.b) Exprimer littéralement puis calculer numériquement : la variation d'énergie interne ΔU , la variation d'enthalpie ΔH , le transfert thermique chaleur Q et le travail W échangés par le système gazeux avec le milieu extérieur.

1.c) Quelle est la variation d'entropie ΔS_g du gaz au cours de l'opération?

1.d) On pose $F \equiv U - TS$ et $G \equiv H - TS$.

Donner la relation entre la variation d'enthalpie libre ΔG et la variation d'énergie libre ΔF du gaz parfait.

2) La paroi du cylindre est toujours diathermane, mais l'opérateur, à l'équilibre initial (P_1, V_1, T_1), place sur le piston (de section s) une masse $M = \frac{(P_2 - P_1)s}{g}$ (où g est l'intensité du champ de pesanteur).

2.a) Reprendre les calculs de la question 1.a), sachant que $P_2 = 10 \text{ bars}$.

2.b) On note ΔS_a la variation d'entropie de l'atmosphère extérieure au cours de l'opération. → Calculer ΔS_a .

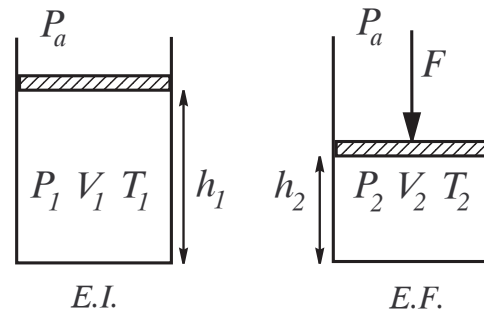
Que représente $\Delta S_g + \Delta S_a$? Commenter le signe de cette expression.

Rép : 1.a) $V_2 = 5.10^{-4} m^3$; 1.b) $Q = -1151 J$; 1.c) $\Delta S = -3,93 J.K^{-1}$; 2.b) $\Delta S_a = 15,36 J.K^{-1}$.

Ex-T4.8 Compression irréversible monotherme

Un cylindre vertical de section S est fermé par un piston horizontal de masse négligeable, mobile sans frottement. Une masse m d'air (considéré comme un gaz parfait de masse molaire M) est enfermée dans le cylindre, à la température initiale T_1 et la pression initiale $P_1 = P_a$ (P_a note la pression ambiante supposée constante).

R est la constante des gaz parfaits et γ note le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constant.



Données : $S = 100 cm^2$; $m = 7,25 g$; $M = 29 g.mol^{-1}$; $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$; $T_1 = 300 K$; $P_a = 1 bar$; $\gamma = 1,4$.

- 1) Calculer V_1 , le volume initial de l'air, et la hauteur h_1 (distance entre le piston et le fond du cylindre).
- 2) Exprimer la variation élémentaire d'entropie d'une masse m de gaz parfait, au cours d'une transformation quasi-statique, en fonction de m , R , M , γ , $\frac{dT}{T}$ et $\frac{dV}{V}$.
- 3) Les parois du cylindre ainsi que le piston sont *diathermanes*, ce qui signifie qu'ils autorisent les transferts thermiques (ont dit aussi qu'il sont « perméables à la chaleur »).

L'ensemble du dispositif se trouve dans une atmosphère maintenue à la température $T_a = T_1 = 300 K$.

On applique *brutalement* la force $F = 1000 N$ sur le piston.

On appelle P_2 et V_2 la pression et le volume de l'air lorsque celui-ci atteint l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.

- 3.a) Calculer le taux de compression $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ et la hauteur h_2 finale.
- 3.b) Calculer le travail W reçu par l'air au cours de l'évolution 1 → 2.
- 3.c) Calculer la variation d'entropie ΔS_{air} de l'air pour cette évolution. Le signe de cette variation est-il 'choquant' ?
- 3.d) Calculer, pour cette même évolution, la variation d'entropie ΔS_{ext} du milieu extérieur. En déduire la variation d'entropie de l'univers' ($\{air+extérieur\}$) : $\Delta S_{\infty} = \Delta S_{air} + \Delta S_{ext}$. Justifier son signe.

Rép : 1) $h_1 = 62,4 cm$; 2) $dS = \frac{mR}{M} \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right)$; 3.a) $h_2 = 31,2 cm$; 3.b) $W_{12} = 624 J$; 3.c) $\Delta S_{air} = -1,44 J.K^{-1}$; 3.d) $\Delta S_{\infty} = {}^pS_{\infty} = 0,64 J.K^{-1}$.

Ex-T4.9 Évolution adiabatique irréversible de vapeur d'eau (*)

Dans une machine à vapeur, au cours de la phase motrice, une mole de vapeur d'eau se détend dans un cylindre calorifugé et fermé de l'état $A \{P_A = 40 bars, T_A = 773 K\}$ jusqu'à l'état $B \{P_B = 1 bar, T_B = 373 K\}$.

On extrait des tables thermodynamiques les valeurs suivantes pour le volume molaire V_m , l'énergie interne molaire U_m et l'entropie molaire S_m :

	V_m en $m^3.mol^{-1}$	U_m en $kJ.mol^{-1}$	S_m en $kJ.K^{-1}.mol^{-1}$
A	$1,556.10^{-3}$	55,77	0,1275
B	$3,060.10^{-2}$	45,08	0,1325

- 1) Calculer le travail W reçu par la vapeur d'eau au cours de l'évolution $A \rightarrow B$. L'évolution est-elle réversible ?
- On modélise l'évolution $A \rightarrow B$ (supposée **QS***) par une évolution polytropique d'indice k ($PV^k = cste$).

→ Déterminer k et en déduire une estimation W' du travail W . Commenter.

2) On réalise une détente réversible entre les mêmes états A et B , représentés par une évolution rectiligne dans le diagramme entropique (T, S) .

Déterminer le transfert thermique Q^* et le travail W^* au cours de cette détente. Comparer W^* et l'estimation polytropique W' obtenue en **1)**. Commenter.

Rép : **1)** $W_m = -10,69 \text{ J.K.mol}^{-1}$; $k = 1,24$; $W'_m = -13,27 \text{ kJ.mol}^{-1}$; **2)** $Q_m^* = 2,87 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $W_m^* = -13,56 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

Ex-T4.10 Échangeur thermique

Dans cet exercice, on utilisera les grandeurs massiques : v, h, w, q , etc. . .

On considère l'échangeur thermique (ETH) représenté ci-contre. Il est constitué de deux circulations parallèles d'air : dans l'une l'air évolue de l'état E_1 à l'état E_2 et dans l'autre l'air évolue de l'état E_3 à l'état E_4 .

Ces états sont caractérisés par la même pression $P = 1 \text{ bar}$ et des températures respectives T_1, T_2, T_3 et T_4 avec $T_3 \neq T_1$.

L'air est assimilé à un GP de coefficient $\gamma = 1,40$.

On donne : $r \equiv \frac{R}{M} = 287 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

Alors l'équation d'état s'écrit : $Pv = rT$.

L'échangeur thermique constitue un système ouvert (Σ) à deux entrées et sorties ; l'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique identique dans les deux circulations.

On néglige les variations d'énergie mécanique.

On suppose que l'échangeur thermique est parfaitement calorifugé et que son fonctionnement est réversible.

On associe au système ouvert (Σ) le système fermé (Σ^*) tel que :

- à l'instant t , (Σ^*) est constitué de (Σ) et des masses dm_1 et dm_3 qui vont entrer dans (Σ) par chacune des entrées pendant la durée dt ;

- à l'instant $t + dt$, (Σ^*) est constitué de (Σ) et des masses dm_2 et dm_4 qui sont sorties de (Σ) pendant la durée dt .

1) En appliquant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique au système (Σ^*), établir deux relations entre les températures T_1, T_2, T_3 et T_4 .

2) En supposant les températures T_1 et T_3 connues, déterminer les températures T_2 et T_4 . Commenter.

3) Dans un échangeur thermique réel, on a $T_1 = 350 \text{ K}$, $T_2 = 290 \text{ K}$, $T_3 = 280 \text{ K}$ et $T_4 = 340 \text{ K}$. Calculer l'entropie massique créée lors du transfert dans chacune des circulations et commenter.

4) En réalité l'échangeur thermique n'est pas parfaitement calorifugé, de telle sorte qu'il cède de la chaleur à l'atmosphère, considérée comme un thermostat dont la température est $T_0 = 293 \text{ K}$. On a alors $T_1 = 350 \text{ K}$, $T_2 = 290 \text{ K}$, $T_3 = 280 \text{ K}$ et $T_4 = 330 \text{ K}$.

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système (Σ^*), calculer le transfert thermique massique dans chacune des circulations et commenter. Calculer l'entropie massique créée correspondante et commenter.

Rép : **1)** $T_2 - T_1 = T_3 - T_4$ et $T_1 T_3 = T_2 T_4$; **2)** $T_3 = T_2$ et $T_4 = T_1$; **3)** $\Delta s = {}^c s = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} = 6,13 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$; **4)** $q = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) = -10,0 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

