

■ T2 ■ Statique des fluides

OBJECTIFS

- Dans le chapitre précédent (→ Cf Cours **T1**), nous avons défini « la » pression d'un gaz en équilibre thermodynamique ; il s'agissait d'une grandeur intensive uniforme, ce qui sous-entendait (notamment lorsque nous avons postulé le caractère homogène, isotrope et stationnaire de la distribution des vitesses du GPM) que le système thermodynamique n'était soumis à aucune force extérieure et se trouvait au repos dans le référentiel d'étude.
- Dans ce chapitre consacré à la **statique des fluides**, le système **fluide** est toujours supposé « au repos » (cf. §I.1), mais cet équilibre est étudié dans un référentiel galiléen, *en présence d'un champ de force extérieure*.
- La prise en compte du champ de pesanteur dans le référentiel terrestre permettra d'expliquer pourquoi la pression de l'air atmosphérique diminue avec l'altitude (§II) tandis qu'elle augmente avec la profondeur dans une fosse marine (§III).
- L'étude d'un fluide en équilibre conduisant à l'expression du champ de pression, elle permet de calculer les **forces pressantes** exercées par le fluide sur les objets qui sont à son contact (§IV.1). Lorsqu'un objet est entièrement immergé, le **théorème d'Archimède** permet, sous certaines conditions, d'exprimer rapidement la résultante de ces forces de pression (§IV.2).
- La statique des fluides possède de **nombreux domaines d'application** :
 - en physique, elle permet de prendre en compte la poussée d'Archimède dans les problèmes de mécanique du point ou du solide (→ Cf Cours **M2.IV.3.a**) ;
 - en science de l'ingénieur, elle intervient dans l'étude des systèmes hydrauliques (vérins, presses, Cf. §III.3.d), des machines thermiques, ainsi que dans les technologies mises en œuvre par l'exploration de l'espace et des fonds marins.

I Relation fondamentale de la statique des fluides

I.1 Modèle du Fluide Continu

◇ **Définition** : Un **fluide** (liquide ou gaz) est un ensemble de particules microscopiques occupant un volume dont la géométrie s'adapte au récipient qui le contient. Un **liquide** occupe un *volume limité* par une **surface libre** (état compact mais désordonné), tandis qu'un **gaz** diffuse dans *tout l'espace* qui lui est offert (état dispersé et désordonné).

On travaille à l'échelle mésoscopique, définissant la **particule (de) fluide** (→ Cf Cours **T1**) en chaque point M du fluide et on note :

- dV_M le volume élémentaire défini à l'échelle mésoscopique.

- $dN = n^*(M) dV_M$ le nombre de molécules contenues dans l'élément de volume.

- Ce nombre est suffisamment élevé pour pouvoir définir des propriétés locales : $\rho(M) = \frac{dm}{dV}$, $P(M)$, $T(M)$, $\vec{v}(M)$...

◇ **Définition** : dans un fluide, les propriétés et variables physique, définies localement en chaque point M , varient continûment à l'échelle macroscopique : on dit que les fluides sont des **milieux continus**.

Rappel : On appelle « champ scalaire » $f(M)$ (ou « champ vectoriel » $\vec{f}(M)$) une fonction f (ou \vec{f}) définie en tout point M de l'espace et ne dépendant que de la position de M (et du temps t) → on parle donc, par la suite, de « champ de pression », « champ de température », « champ de masse volumique », « champ des vitesses », ...

Ex : donc, en ce qui concerne le champ des vitesses, la vitesse en M est la vitesse statistique de la particule fluide dans le référentiel du laboratoire :

$$\vec{v}(M, t) \equiv \frac{1}{dN} \sum_i \vec{v}_{i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \underbrace{\frac{1}{dN} \sum_i \vec{v}_i^*}_{\vec{0}} = \overline{\vec{v}}_{/\mathcal{R}}$$

De plus, si le régime est indépendant du temps on dit qu'on est en régime stationnaire/permanent : $\vec{v}(M, t) = \vec{v}(M)$.

■ Hypothèse de ce cours :

on se limite à la **statique** des fluides, c'est-à-dire à l'étude des fluides dits « au repos » :

$$\forall M \quad \vec{v}(M) = \vec{0}$$

Interprétation : Ceci traduit que, dans le référentiel du laboratoire, il n'y a aucun mouvement *d'ensemble* du fluide. Bien entendu, du fait de l'agitation thermique, les molécules sont sans cesse en mouvement, mais leur moyenne statistique associée est nulle.

Rq : dans l'hypothèse de l'approximation des milieux continus, une particule de fluide dV_M est assimilable à un point matériel.

→ on pourra donc appliquer les lois de la mécanique du point à une particule de fluide.

I.2 Champ de forces dans un fluide au repos

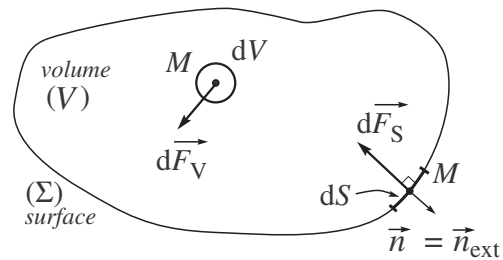
On effectue un bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un système fluide délimité par une surface Σ (fictive ou réelle). On classe ces actions en 2 catégories :

a Forces volumiques

Elles sont dues aux forces à longue portée (gravitation, électromagnétisme) et aux forces d'inertie (dans un \mathcal{R} non gal.).

On définit la densité volumique de force :

$$\vec{f}_v \equiv \frac{d\vec{F}_v}{dV} \quad (\text{en } N.m^{-3})$$



Ex à connaître : forces de pesanteur (dans \mathcal{R}_T) : $\vec{f}_v = \frac{dm \vec{g}}{dV} = \rho \vec{g}$

(car $dm = \rho dV$ dans l'approximation des milieux continus) → $\vec{f}_{v,g}(M) = \rho(M) \vec{g}$

b Forces surfaciques

Elles sont dues aux forces à courte portée (contact, chocs).

♦ **Déf :** Ce sont elles qui définissent la pression en M :

$$d\vec{F}_S = -P(M) d\vec{S} = -P(M) dS \vec{n}_{ext}$$

orientation : force exercée par l'extérieur sur la surface élémentaire dS conventionnellement orientée *vers l'extérieur* : $\vec{n} = \vec{n}_{ext}$.

Rappel : $P = P_{cinétique} + P_{moléculaire} = P_k + P_m$.

où P_m note la pression moléculaire et traduit les interactions attractives ($P_m < 0$ usuellement) dues aux forces intermoléculaires au voisinage de dS .

- pour les GP : $P_m = 0$;

- pour les gaz réels : $|P_m| \ll P_k$;

- pour les liquides : $|P_m| \lesssim P_k$.

c « Densité volumique » des forces de pression

→ On s'intéresse dans ce paragraphe à l'expression, dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , des forces de pression subies par une particule fluide dont la forme est celle d'un parallélépipède de volume $dV = dx dy dz$ au voisinage de $M(x, y, z)$.

Hyp : le fluide est homogène et la pression ne dépend que de z .

Système :

$$S = \{ \text{volume élémentaire de fluide centré en } M \}$$

$$= \{ \text{particule de fluide } dV = dx.dy.dz \}$$

Le **bilan des forces de pression** comporte 6 termes, un pour chaque face du parallélépipède $dx.dy.dz$:

$d\vec{F}_A$ pour la face centrée en A ;

$d\vec{F}_B$ pour la face centrée en B ;

$d\vec{F}_C$ pour la face centrée en C ;

$d\vec{F}_D$ pour la face centrée en D ;

$d\vec{F}_1$ pour la face horizontale élémentaire $dS = dx.dy$ centrée en M_1 , à l'altitude z ;

$d\vec{F}_2$ pour la face horizontale élémentaire $dS = dx.dy$ centrée en M_2 , à l'altitude $z + dz$.

Les expressions de ces deux derniers termes sont :

$$d\vec{F}_1 = -P(z).dS.\vec{n}_{\text{ext},1} = P(z).dS.\vec{e}_z \quad \text{et} \quad d\vec{F}_2 = -P(z + dz).dS.\vec{n}_{\text{ext},2} = -P(z + dz).dS.\vec{e}_z$$

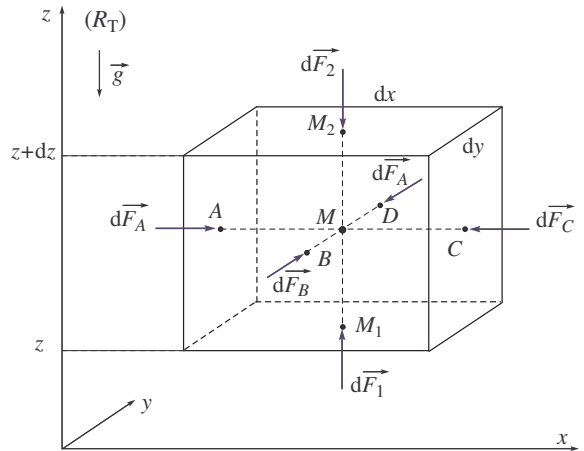
La résultante $d\vec{F}$ des forces pressantes exercées sur le volume dV s'écrit :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + \underbrace{d\vec{F}_A + d\vec{F}_C}_{\vec{0} \text{ car } P(A)=P(C)} + \underbrace{d\vec{F}_B + d\vec{F}_D}_{\vec{0} \text{ car } P(B)=P(D)} = -(P(z+dz) - P(z)).dS.\vec{e}_z = -\frac{dP}{dz}.dz.dS.\vec{e}_z$$

On a donc : $d\vec{F} = -\frac{dP}{dz}.dx.dy.dz.\vec{e}_z = -\frac{dP}{dz}.dV.\vec{e}_z$, soit : $\vec{f}_{v,p} = \frac{d\vec{F}}{dV} = -\frac{dP}{dz} \vec{e}_z$

Conclusion : Tout se passe comme si, aux forces de pression qui sont pourtant des forces surfaciques, on pouvait associer une « densité volumique » de force pressante :

$$d\vec{F}_{\text{pression}} = \vec{f}_{v,p}.dV = -\frac{dP}{dz}.dV.\vec{e}_z \quad \text{avec } P = P(z)$$



I.3 Relation Fondamentale de la Statique des Fluides dans le champ de pesanteur uniforme

a Établissement de la RFSF

Méthode 1 :

Système / bilan : Une {particule fluide à l'altitude z de volume dV }¹ au repos dans \mathcal{R}_T (considéré galiléen) est soumise à :

→ la résultante (élémentaire) des forces de pression : $d\vec{F}_{\text{pression}}$

→ le poids (élémentaire) de ce volume élémentaire : $dm.\vec{g}$

• Le TCI (Théorème du Centre d'Inertie) pour cette particule de fluide au repos s'écrit, dans \mathcal{R}_T :

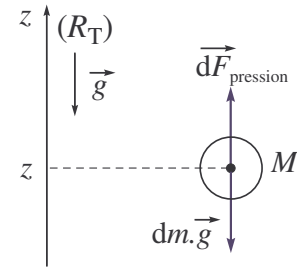
1. Ici, la notation « dG » représente la grandeur extensive élémentaire, à l'instant t , qui caractérise le système {particule fluide} : volume élémentaire (dV), masse élémentaire (dm), force élémentaire $d\vec{F}$ qui s'exerce sur ce système élémentaire, ...

$$dm \cdot \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_T}} = d\vec{F}_{\text{pression}} + dm \cdot \vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = -\frac{dP}{dz} \cdot dV \cdot \vec{e}_z - dm \cdot g \cdot \vec{e}_z \quad \text{avec : } dm = \rho(M) \cdot dV$$

On en déduit la **RFSF dans le champ de pesanteur uniforme du référentiel terrestre \mathcal{R}_T** :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$



Attention : dans cette expression, la masse volumique ρ est une grandeur intensive, donc définie localement, pour la particule fluide centrée au point M : $\rho(M) = \left(\frac{dm}{dV}\right)_M$.

A priori donc : $\rho(M) = \rho(z)$ (où z est l'altitude de la particule fluide où on applique la RFSF).

Méthode 2 :

Système : Le système \mathcal{S} est cette fois est une {tranche élémentaire de fluide entre z et $z + dz$ }, de masse (élémentaire) dm , de hauteur (élémentaire) dz et de surface S^2 .

Bilan des forces : Dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , cette tranche élémentaire de fluide est soumise :

$$\rightarrow \text{à son poids } dm \cdot \vec{g} = -\rho(M) \cdot dV \cdot g \vec{e}_z$$

\rightarrow à la résultante $d\vec{F}_l$ des forces de pression selon la surface latérale dS_l (de hauteur dz) — cette force est la somme de forces pressantes orthogonales en chacune des surfaces élémentaires et verticales qui constituent dS_l , donc : $d\vec{F}_l \perp \vec{e}_z$

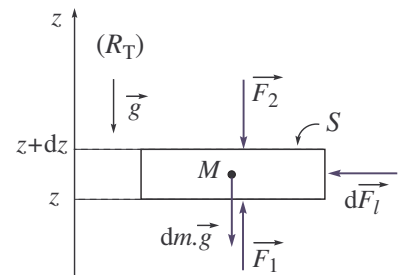
$$\rightarrow \text{la résultante } \vec{F}_1 \text{ des forces pressantes sur la surface } S \text{ à l'altitude } z : \vec{F}_1 = P(z) \cdot S \cdot \vec{e}_z$$

$$\rightarrow \text{la résultante } \vec{F}_2 \text{ des forces pressantes sur la surface } S \text{ à l'altitude } z : \vec{F}_2 = -P(z + dz) \cdot S \cdot \vec{e}_z$$

• Le TCI (Théorème du Centre d'Inertie) pour ce système fluide, de barycentre M , au repos dans \mathcal{R}_T :

$$dm \cdot \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_T}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + dm \cdot \vec{g} + d\vec{F}_l$$

$$\xrightarrow[\text{selon } \vec{e}_z]{\text{en projection}} \quad 0 = -\underbrace{(P(z + dz) - P(z)) \cdot S}_{\frac{dP}{dz} \cdot dz} - \rho \cdot \underbrace{dV}_{S \cdot dz} \cdot g$$



On en déduit la **RFSF dans le champ de pesanteur uniforme du \mathcal{R}_T** :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$

b Surface isobares

◇ **Définition** : On appelle surface isobare les surfaces où $P(M) = \text{Cte}$

Csqce : Dans le référentiel terrestre, l'application de la RFSF conduit à $dP = -\rho \cdot g \cdot dz$.
Deux conséquences :

- un déplacement sur une surface isobare de traduisant par $dP = 0$, on en déduit que $dz = 0$ sur une isobare dans le champ de pesanteur uniforme ;
- une augmentation de pression $dP > 0$ se traduit par une diminution de l'altitude $dz < 0$

CI : Dans le champ de pesanteur uniforme :

- les surfaces isobares sont des plans horizontaux $z = \text{Cte}$.
- la pression diminue avec l'altitude.

2. Ici, bien que la surface ne soit pas élémentaire, le volume l'est puisque $dV = S \cdot dz$. Le système n'est toutefois pas une particule fluide, car son volume élémentaire n'est pas un volume élémentaire d'ordre 3 de la forme : $d^{(3)}V = dx \cdot dy \cdot dz$

II.3 influence du volume (hauteur) du système d'étude

- Hauteur caractéristique H :

$$P(z) = P_0 \exp \left(\underbrace{-\frac{Mg}{RT} z}_{\text{sans dimension}} \right) = P_0 \exp \left(-\frac{z}{H} \right)$$

On a introduit $H \equiv \frac{RT}{Mg}$, la hauteur caractéristique de l'atmosphère isotherme.

Ordre de grandeur : Si on considère l'air comme un GP de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ à la température $T = 293 \text{ K}$ (20°C) : $H \simeq 8,6 \text{ km}$.

- Variations relatives de pression de $(z = 0, P_0)$ à (z, P) :

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P - P_0}{P_0} = \exp \left(-\frac{z}{H} \right) - 1$$

→ On considère que la pression atmosphérique est uniforme si la variation relative est inférieure à 1% :

$$\left| \frac{\Delta P}{P_0} \right| \leq \frac{1}{100} \rightarrow 1 - \exp \left(-\frac{z}{H} \right) \simeq 1 - \left(1 - \frac{z}{H} \right) = \frac{z}{H} \leq \frac{1}{100} \rightarrow z \leq \frac{H}{100} = 86 \text{ m}$$

Conclusion : Pour les systèmes usuels de faible dimension, on pourra très bien négliger les variations de pression avec l'altitude.

On ne parle plus de pression *en un point* mais de pression *du gaz*.

L'influence du champ de pesanteur est donc négligeable à l'échelle des expériences usuelles.

Rq1 :

Si la pression P est uniforme comme $T = \text{Cte}$, la masse volumique ρ l'est aussi.

Rq2 :

Les variations de $P(z)$ et $\rho(z)$ avec l'altitude ne sont pris en compte que dans les problèmes « atmosphériques ».

Rq3 :

Le modèle de l'atmosphère isotherme n'est valable que pour la stratosphère ($11 \text{ km} \lesssim z \lesssim 25 \text{ km}$) avec $T \simeq 223 \text{ K}$ ($t = -50^\circ\text{C}$).

