■ O1 ■ Bases de l'optique géométrique

« ... il est un courrier, inimaginablement rapide, qui frappe ou quitte à chaque instant chaque point matériel, tendant au travers du Monde un prodigieux réseau de messages individuels entrecroisés et permettant par là en tous lieux une perception séparée de ces divers points, déterminant enfin par surcroît au sein de la Matière les réactions nécessaires à la Vie et à la Pensée.
Ce messager subtil, cet Éveilleur, qui donne comme une âme à l'Univers, et découvre à nos yeux mortels un peu de la splendeur des Cieux et de la Terre, c'est la LUMIÈRE. »

Jean PERRIN (1870-1942) [Nobel de physique 1926] – (1940)

OBJECTIFS

L'Optique est la branche de la physique qui étudie la lumière. C'est un domaine très vaste qui a connu dans la deuxième moitié du XX^e siècle une progression spectaculaire avec la mise au point des lasers (cf. **I.3**).
Les applications technologiques de cette science désormais multidisciplinaire sont très répandues dans notre société. Il suffit pour s'en convaincre de penser à l'importance, dans notre quotidien, de toutes les diverses sources de lumière qui nous entourent : écrans cathodiques, LCD, plasma ou à cristaux liquides de télévision ou d'ordinateur, télécommande à infrarouge, sans oublier le lecteur de disque compact à laser par exemple. Quant aux Technologies de l'Information et de la Communication (TIC : ordinateur à grande puissance de traitement, DVD, fibre optique [cf. **II.3**], écrans de téléphones portables), elles sont les applications les plus récentes, désormais omniprésentes, de l'Optique, science en perpétuelle évolution.
L'Optique étudiée en PTSI : On distingue traditionnellement l'Optique géométrique, qui s'appuie sur la notion de rayon lumineux et permet d'expliquer la formation des images et l'Optique physique qui s'intéresse plus spécifiquement aux problèmes que ne peut pas traiter l'Optique géométrique (cohérence, interférences, diffraction, ➜ cf. Cours de **Maths Spé**).

L'Optique géométrique peut être construite sans faire référence à la nature de la lumière. Il suffit de postuler l'existence des rayons lumineux (cf. **I.4**) et d'admettre que leur trajectoire obéit à certaines règles de géométrie. C'est assez pour construire des lunettes de correction, des microscopes, des appareils photographiques, des télescopes... Cette Optique est donc avant tout pratique et descriptive, essentiellement fondée sur la géométrie plane. Il y a peu de raisonnements physiques, les calculs concernent avant tout la **trigonométrie** et l'essentiel du travail consiste à **dessiner des figures claires** :

➜ Cf. Rappels de Trigonométrie

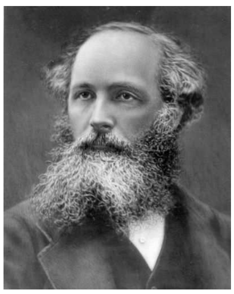
■ Nécessité d'avoir des stylos de couleur, une règle, une équerre et du papier millimétré avec soi.
La partie la plus difficile, l'étude mathématique des aberrations, étant hors programme, l'Optique en PTSI ne crée aucune difficulté quand on sait travailler avec des angles.

■ Extraits du programme de PTSI.
- Notion de rayon lumineux. [On se limite à une présentation qualitative de l'approximation de l'optique géométrique. Cette notion sera reprise en deuxième année à propos du cours sur la diffraction.].
- Réfraction. Réflexion. Lois de Descartes [L'étude de la propagation des rayons lumineux dans un milieu d'indice continûment variable est hors programme.]

I La nature de la lumière

I.1 Description ondulatoire

a La lumière est une Onde Électro-Magnétique (OEM)



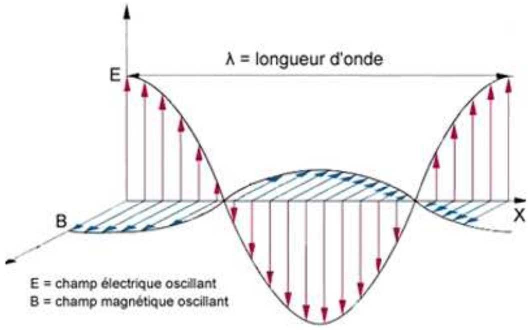
• James Clerk Maxwell (1831-1879) édifie en 1873 la théorie électromagnétique qui montre que la lumière est elle-même une onde électromagnétique et qu'elle résulte de la propagation d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'une champ magnétique $\overrightarrow{B}$ variant au cours du temps.
La lumière fait partie de la même famille que celle des ondes de télévision, radio ou de celle émise par un four à micro-ondes !
• Une onde (progressive sinusoïdale) se propageant dans la direction (Ox) peut être décrite par une grandeur périodique dans l'espace et le temps de la forme :

$$\boxed{s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \begin{cases} \omega \text{ la pulsation (en } rad.s^{-1}) \text{ de l'onde} \\ k \text{ son nombre d'onde (en } m^{-1}) \\ s_0 \text{ son amplitude} \end{cases}$$

➜ Cf. Cours Math Spé

• La **pulsation** d'une onde est liée à ses variations temporelles,

de **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de **fréquence** $\nu = \frac{1}{T}$.



▲ En spectroscopie, le nombre d'onde est le plus souvent l'inverse de λ : $\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda}$
➜ Cf. SM2 §I.1

• Le **nombre d'onde** est lié aux variations spatiales de l'onde,

de **longueur d'onde** $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

❚ Double périodicité : La **vitesse de propagation** (appelée également **célérité** et notée c) d'une onde lumineuse monochromatique dans un milieu transparent donné relie sa période temporelle T à sa période spatiale λ dans ce milieu : $\lambda = c.T = \frac{c}{\nu}$

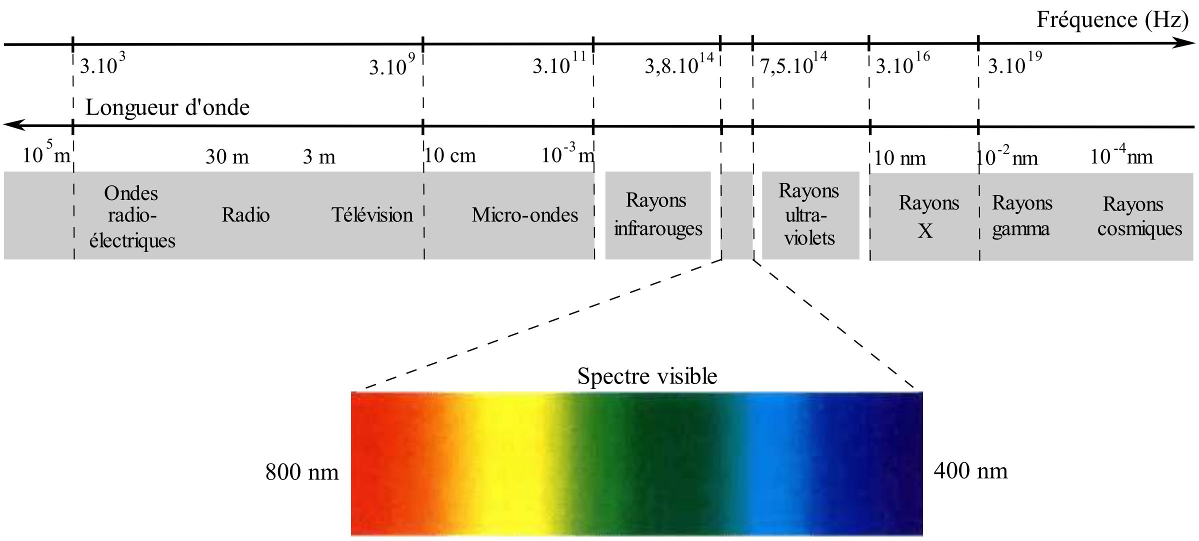
Rq : les ondes électromagnétiques sont différentes des ondes mécaniques (comme l'onde qui crée une vague) en ce sens qu'elles n'ont pas besoin de support matériel pour se propager. Dans le vide elles se propagent toutes à la vitesse de la lumière dans le vide : $c_0 \simeq 3.10^8\ m.s^{-1}$. Alors $\lambda = \lambda_0 = c_0.T = \frac{c_0}{\nu}$.

➜ Cf. IPC2

b La lumière visible dans le spectre électromagnétique

La lumière est une superposition d'ondes électromagnétiques monochromatiques (*i.e.* sinusoidales) de différentes longueurs d'onde.

Le domaine de la lumière « visible »(par l'œil humain !) correspond aux longueurs d'onde dans le vide (approximativement) comprises entre 400 nm et 800 nm (0,4 μm et 0,8 μm).



c Propagation dans un milieu matériel T.H.I.

◇ **Définition :** Nous étudierons la propagation de la lumière dans un milieu Transparent, Homogène et Isotrope (**T.H.I.**) :
- **transparent** parce qu'on suppose qu'il n'y a pas de phénomène d'**absorption** de la lumière à la traversée de ce milieu
- **homogène** parce que les propriétés du milieu sont les mêmes en tout point de l'espace
- **isotrope** parce que les propriétés physiques du milieu sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace.

Rq : Pour l'étude du phénomène d'absorption (qui existe toujours en réalité et qui se traduit par la décroissance de l'intensité lumineuse à la traversée d'un milieu matériel) ➜ Cf Cours de **Math Spé**.

◇ **Définition :** On appelle **indice de réfraction (absolu)** d'un milieu T.H.I., et on note n, le rapport de la célérité c_0 d'une onde lumineuse monochromatique dans le vide à sa célérité c dans le milieu considéré :

$$\boxed{n = \frac{c_0}{c}}$$

Ordre de grandeur :
$n(\text{air}) = 1,00029 \simeq 1$; $n(\text{eau liquide}) = 1,333 \simeq 1,33$; $n(\text{glace}) = 1,309$
$n(\text{verre de type Flint}) = 1,620$; $n(\text{verre de type Crown}) = 1,516$; $n(\text{diamant}) = 2,417$.

▌Propriété et Loi de Cauchy :
La vitesse de propagation d'une onde lumineuse dans un milieu matériel étant toujours inférieure à sa vitesse dans le vide, on a : $\boxed{n > 1}$
La plupart des milieux T.H.I. vérifient la loi de Cauchy :

$$\boxed{n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}}$$

où λ_0 est la longueur d'onde de la lumière étudiée dans le vide.

Conséquence 1 : Comme $c \neq c_0$ (puisque $n > 1$), la longueur d'onde d'une onde lumineuse dépend du milieu dans lequel elle se trouve. Il faudra donc distinguer λ_{milieu} de λ_{vide} :

$$\lambda_{\text{milieu}} = c.T = \frac{c_0}{n}.T = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n} \text{ puisque } \lambda_{vide} \equiv c_0.T \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}}$$

▌Propriété et convention : Comme $n > 1$, dans un milieu matériel, on aura toujours :

$$\boxed{\lambda_{\text{milieu}} < \lambda_{vide}}$$

Un milieu transparent comprime donc les longueurs d'onde.
Pour éviter la profusion des longueurs d'ondes, on choisit la longueur d'onde dans le vide pour définir une onde lumineuse.

Conséquence 2 : Puisque la loi de Cauchy nous dit que l'indice d'un milieu varie en rapport inverse avec le carré de la longueur d'onde et que la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la fréquence ($\lambda = \frac{c}{\nu}$), on en déduit, pour deux radiations lumineuses de fréquences différentes, l'une de couleur bleue et l'autre de couleur rouge :

$$\nu_B > \nu_R \;\Rightarrow\; \lambda_B < \lambda_R \;\Rightarrow\; n_B > n_R \;\Rightarrow\; c_B < c_R$$

▌Propriété : Une lumière rouge se propage plus rapidement qu'une lumière bleue dans un milieu transparent : c'est le phénomène de **dispersion** (➜ Cf TP-Cours sur le **prisme**)

d Les sources de lumière ➜ Cf. Cours

Il existe trois grands type de sources de lumière :

• **Sources à spectre continu :** le spectre (graphe) des fréquences émises est continu et comprend toutes les fréquences du visible. Exemple : le Soleil, les lampes à incandescence.

• **Sources à spectre discret / de raies :** cas des lampes à vapeur de mercure ou de sodium étudiées en TP.

• **Lasers :** qui sont des sources quasi-monochromatiques, c'est-à-dire émettant une seule « raie » lumineuse.

Bien entendu une raie n'est jamais totalement monochromatique et sera caractérisée par la **largeur relative** $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ de l'intervalle de fréquences contré sur la fréquence ν qui caractérise la raie. Mais la largeur relative d'une raie lumineuse émise par un laser ($\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-10}$) est mille fois plus petit que cellle d'une raie lumineuse émise par une source à spectre discret classique ($\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-7}$) !

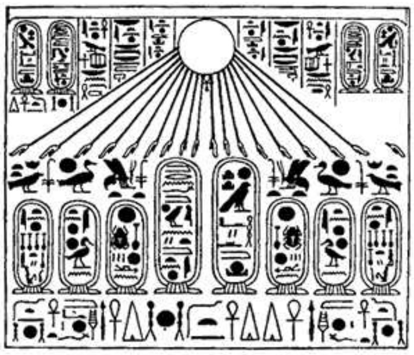
I.2 Description corpusculaire ➜ Cf. Cours de chimie, SM2 §I.1

I.3 Approximation de l'optique géométrique

On désire décrire la **propagation de la lumière** à travers différents milieux matériels. Cette étude est très compliquée lorsqu'on utilise la description de la lumière en terme d'onde du champ électrique et magnétique. On se limite au cadre de l'**Optique géométrique** qui ne considère ni le caractère ondulatoire, ni la caractère corpusculaire de la lumière, mais qui utilise une **approximation** qui consiste à isoler, du flux lumineux étudié, une courbe matérialisant la direction de propagation de l'onde (ou la trajectoire des photons, comme en mécanique). Cette courbe est appelée **rayon lumineux**.

a Le rayon lumineux

Le pharaon Akhénaton (à gauche), son épouse Néfertiti et trois de leurs filles sous les rayons protecteurs d'Aton, le dieu du soleil (Egypte, milieu du XIVe siècle avant J.-C., Musée de Berlin).



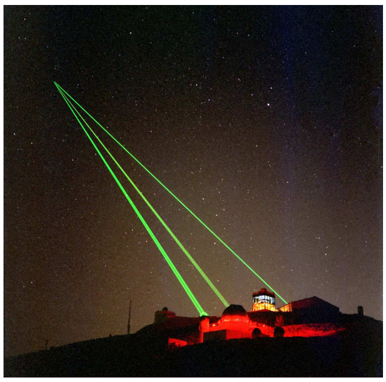
Aton étend ses rayons bienfaisants sur ses propres cartouches et ceux de Neferkhépérourê-Ouâenrê Akhénaton et de Neferneferouaton-Nefertiti.

Sculpture d'albâtre découverte dans la tombe d'Akhénaton (Musée du Caire)

▮ **Hypothèse simplificatrice de l'Optique géométrique :**
la lumière est formée de rayons lumineux.
(Alors, on se rend compte que la propagation de la lumière obéit à des lois simples)

Expérimentalement, il est **impossible** d'isoler un rayon lumineux, ni même un mince ensemble de rayons (pinceau lumineux). Par contre, un faisceau **laser** est une bonne **approximation** d'un pinceau/rayon lumineux.

La photo ci-contre en donne la preuve : on y distingue trois lasers vers dirigés vers le ciel nocturne, issus des bâtiments du Starfire Optical Range de la Kirtland Air Force Base à Albuquerque (USA, New Mexico). Ces lasers, couplés à des instruments utilisant l'optique adaptative sont utilisés pour éliminer ou réduire les distorsions optique causées par l'atmosphère céleste : on peut alors observer les étoiles sans se soucier du caractère inhomogène de l'atmosphère.



b Principe d'indépendance des rayons lumineux

En optique géométrique, il n'y a aucun phénomène d'interférences, ce qui revient à dire que les rayons sont considérés indépendants les uns des autres.

Rq : Le fait que deux rayons peuvent se croiser sans influer l'un sur l'autre a conduit FRESNEL à remettre en cause le « principe » d'indépendance des rayons lumineux. Ceci parce que l'optique géométrique n'est qu'une **approximation** de l'optique ondulatoire (= optique physique).
→ ainsi, lorsqu'on diminue la dimension du système optique (diamètre d du diaphragme p.ex.), il apparaît le phénomène de **diffraction** dès que $d \sim \lambda$:

▮ Condition d'application de l'Optique géométrique :
Si $\lambda \ll d$, alors l'approximation de l'optique géométrique est valable.

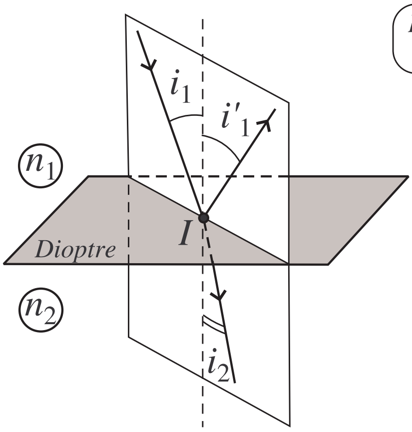
c La lumière se propage en ligne droite dans un milieu T.H.I.

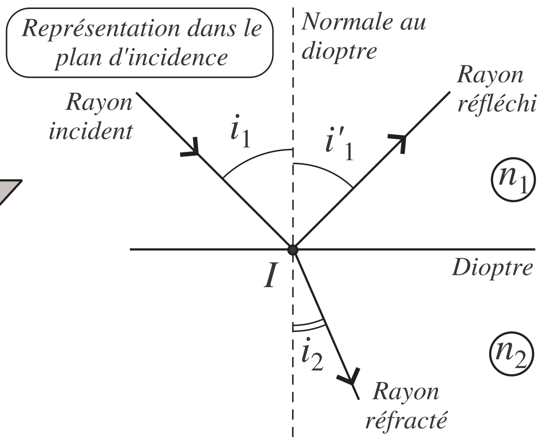
Cette propriété traduit le caractère **homogène** du milieu étudié : l'indice optique n a la même valeur en tout point du milieu.

II Lois de Snell (1620) et de Descartes (1637)

II.1 Énoncé

◇ **Définition :** On appelle :
- **dioptre** la surface de séparation entre deux milieux matériels d'indices différents ;
- **plan d'incidence** le plan contenant le rayon incident et la normale $\overrightarrow{N}$ au dioptre.





▮ Lois de Snell-Descartes :
(1) Rayon incident, rayon réfléchi et rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.
(2) L'angle i_1 entre le rayon incident et la normale est égal à l'angle i'_1 entre le rayon réfléchi et la normale : $i_1 = i'_1$
(3) L'angle i_1 entre le rayon incident et la normale et l'angle i_2 entre le rayon réfracté et la normale vérifient : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Rq : Si i_1 et i_2 sont faibles alors **(3)** $\Rightarrow$ $n_1\, i_1 \simeq n_2\, i_2$ (Loi de KEPLER).

II.2 conséquences

a Principe du retour inverse de la lumière :

Les lois de DESCARTES ne font pas intervenir le sens de propagation de la lumière
$\rightarrow$ **tout trajet suivi par la lumière dans un sens peut l'être dans le sens opposé**.

b A quelle condition le rayon se rapproche de la normale au dioptre ?

SI $n_1 > n_2$, alors ① est plus **réfringent** que ② et le rayon réfracté s'éloigne de $\overrightarrow{N}$;
SI $n_2 > n_1$, alors ② est plus **réfringent** que ① et le rayon réfracté se rapproche de $\overrightarrow{N}$.

> Le rayon le plus proche de la normale est celui qui se trouve dans le milieu d'indice le plus élevé, c'est-à-dire **dans le milieu le plus réfringent**.

c Réfraction limite dans le cas $n_1 < n_2$

Lorsque la lumière passe d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent ($n_1 < n_2$), le rayon réfracté se rapproche de la normale car :

$$n_1 < n_2 \ \Rightarrow\ \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1 < \sin i_1 \ \Leftrightarrow\ \boxed{i_2 < i_1}$$

Donc, lorsque i_1 varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, alors i_2 varie de 0 à i_{2l} tel que $\boxed{\sin i_{2l} = \frac{n_1}{n_2} < \frac{\pi}{2}}$.

i_{2l} s'appelle **l'angle de réfraction limite**.

> Lorsque la réfraction a lieu dans un milieu plus réfringent que le milieu de la lumière incidente, tous les rayons réfractés sont contenus dans un cône de sommet I et de demi-angle au sommet l'angle de réfraction limite i_{2l}.

d Réflexion totale dans le cas $n_1 > n_2$

Lorsque la lumière passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent ($n_1 > n_2$), le rayon réfracté s'éloigne de la normale car :

$$n_1 > n_2 \ \Rightarrow\ \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1 > \sin i_1 \ \Leftrightarrow\ \boxed{i_2 > i_1}$$

Donc, lorsque i_2 varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, alors i_1 varie de 0 à i_{1c} tel que $\boxed{\sin i_{1c} = \frac{n_2}{n_1} < \frac{\pi}{2}}$.

i_{1c} s'appelle **l'angle d'incidence critique** au-delà duquel il ne peut pas exister de rayon réfracté qui satisfasse aux lois de Snell-Descartes.

> Lorsque la lumière incidente est dans le milieu le plus réfringent, si l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique ($i_1 > i_{1c}$) :
> - le phénomène de réfraction est impossible
> - toute la lumière est réfléchie : on parle de phénomène de **réflexion totale**.

Applications : Ce phénomène est utilisé dans les prismes à réflexion totale et dans le transport de la lumière dans les fibres optiques, ➜ Cf Cours et Exercices.

II.3 Application au prime à réflexion totale

II.4 Formules du prisme

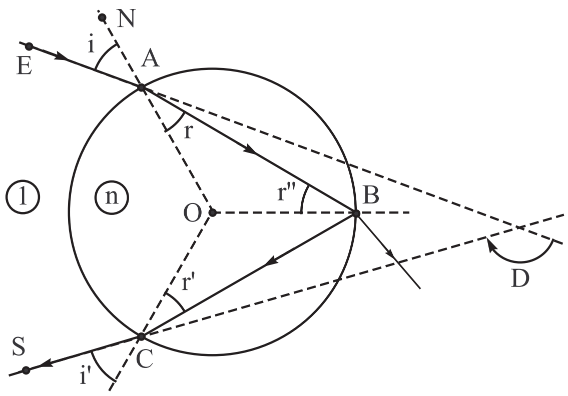
II.5 Application aux fibres optiques à saut d'indice

II.6 Dispersion par une goutte d'eau

II.7 Propagation dans un milieu d'indice variable (modèle stratifié)

II.7 Action d'une goutte d'eau

Une goutte d'eau sphérique, de centre O,
d'indice (moyen) $n = \frac{4}{3}$,
reçoit un rayon incident EA en A,
tel que $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AN}) = i$.



On considère successivement
- le rayon réfracté AB,
- le rayon réfléchi BC,
- puis le rayon transmis CS.

On pose : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = r$.

« Dans un premier temps, on considère que le rayon lumineux incident est monochromatique. »
→ cela signifie que la lumière incidente possède une seule longueur d'onde λ et donc que l'indice $n = n(\lambda)$ de l'eau est fixe dans cette question.

1) Exprimer r'' puis r' en fonction de r.

• Loi de la réfraction en A : $\boxed{\sin i = n \sin r}$ ①.

• Puisque OAB et OBC est isocèle en O, on a $\boxed{r'' = r}$.

• D'après la loi de la réflexion en B on a égalité de l'angle du rayon incident (AB) qui vaut r'' et de l'angle du rayon réfléchi (BC) avec la normale en B (OB)

De plus, comme OBC est isocèle en O, on a $r' = r''$ et donc $\boxed{r' = r}$.

◇ **Définition :** On appelle déviation l'angle $D = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CS})$.

Q : Montrer que $D = \pi + 2i - 4r$.

• La loi de la réfraction en C s'écrivant alors $n \sin r = \sin i'$, on déduit de ① que $\boxed{i' = i}$.

• Or

$$\begin{array}{rcccccc} D = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CS}) & = & (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AB}) & + & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) & + & (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CS}) \\ & = & (i - r) & + & (\pi - 2r) & + & (i - r) \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{D = \pi + 2i - 4r}$.

2) Exprimer la dérivée $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}$,
puis, grâce à la loi de Descartes pour la réfraction en A, exprimer $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$.

• Dire que λ est constante implique que n est fixé et donc que r ne dépend que de i.

D'où : $\boxed{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 2 - 4\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}}$ ②

De plus, en dérivant ① par rapport à i, on obtient $\cos i = n \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} \cos r$, soit : $\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \frac{\cos i}{n \cos r}}$ ③

3) Pour une certaine valeur i_m de i, la déviation D passe par un minimum D_m.
Montrer qu'alors, la valeur de r correspondant vérifie la relation : $\cos i_m = \frac{n}{2} \cos r_m$.
Montrer que cette valeur r_m est donnée par l'expression : $r_m = \arcsin \sqrt{\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3}}$
Calculer i_m, r_m et D_m au minimum de déviation.

• Dire que la déviation D passe par un minimum revient à dire que sa dérivée s'annule en $i = i_m$, soit :

$$② \xrightarrow{③} \left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}\right)_{i_m} = 0 = 2 - 4.\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)_{i_m} = 2 - 4.\frac{\cos i_m}{n \cos i_m}$$

Ainsi lorsque la déviation est minimale, on a la relation $\boxed{\cos i_m = \frac{1}{2} n.\cos r_m}$ ④.

• De plus, on a toujours réfraction en A et C avec la relation ①.

On déduit de ①^2 + ④^2 la relation : $n^2 \sin^2 r_m + \frac{n^2}{4} \cos^2 r_m = 1$

Soit encore : $\frac{3}{4} n^2 \sin^2 r_m + \frac{n^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 r_m = \frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{r_m = \arcsin \sqrt{\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3}}}$

AN : $r_m = 40,2°$ $\quad i_m = 59,4°$ $\quad D_m = 138°$

La goutte est éclairée maintenant avec de la lumière blanche, sous incidence fixée au minimum de déviation ($i = cste = i_m$) associé à l'indice n de la question précédente.

4) Pourquoi doit-on considérer que l'indice de la goutte d'eau s'étend entre n et $n + \Delta n$ pour une telle lumière ? Quel phénomène se produit-il en A ?

D'après la loi de Cauchy, l'indice de la goutte d'eau dépend de la longueur d'onde de la lumière qui la traverse. Comme la lumière blanche est polychromatique ($\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \Delta\lambda$), on en déduit que l'indice dela goutte d'eau s'étend entre n et $n + \Delta n$.
Ce qui conduit au **phénomène de dispersion** de la lumière au point A.

5) Exprimer $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n}$ et $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n}$.
En déduire alors la variation ΔD_m pour une variation Δn de l'indice, en fonction de r_m, n et Δn.

Au « minimum de déviation »associé à la longueur d'onde donnée à la question précédente, on a, **quelque soit la longueur d'onde** :

$$D = \pi + 2i_m - 4r = \pi + 2i_m - 4r(\lambda) = \pi + 2i_m - 4r(n) \qquad \text{et donc : } \boxed{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n} = -4\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n}} ⑤$$

De plus, on obtient, en dérivant ① par rapport à n :

$$① \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}} 0 = \sin r + n \cos r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n} = -\frac{\sin r}{n \cos r} = -\frac{\tan r}{n}} ⑥$$

On en déduit : $⑤ \xrightarrow{⑥} \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n} = \frac{4 \tan r}{n}$, soit :

$$\boxed{\Delta D_m = 4 \tan r_m \frac{\Delta n}{n}}$$

6) Application numérique : $\Delta n = 10^{-2}$.

$\Delta n = 10^{-2} \Rightarrow \boxed{\Delta D_m = 0,025\ rad = 1,45° = 1°27'}$

$$\lambda_R > \lambda_{\mathsf{Vi}} \rightarrow n_{\mathsf{R}} < n_{\mathsf{Vi}} : \begin{cases} n_{\mathsf{R}} = n \\ n_{\mathsf{Vi}} = n + \Delta n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta D_{m,\mathsf{R}} = 0 \\ \Delta D_{m,\mathsf{Vi}} = \Delta D_m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta(\lambda) = \pi - D_m(\lambda) \\ \text{on a : } \theta_{\mathsf{R}} > \theta_{\mathsf{Vi}} \end{cases}$$