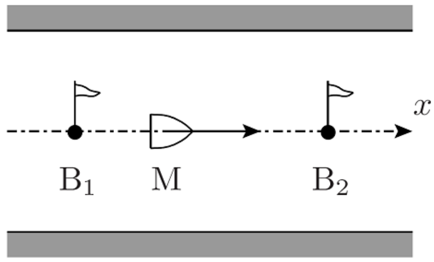
■ Changement de référentiels : aspect cinématique

M8

Ex-M8.1 Aller-retour sur un fleuve

Deux bouées B_1 et B_2, distantes de l, sont situées sur un canal, dont le courant a pour vitesse uniforme $\overrightarrow{u}$ par rapport aux berges et s'écoule de B_1 vers B_2. Ces bouées sont fixes par rapport aux berges. Un rameur, assimilé à un point matériel M, effectue un aller-retour entre les deux bouées, sa vitesse par rapport au courant (à l'eau) gardant toujours la même norme égale à v telle que $v > u$.



1) Exprimer les vitesses $\overrightarrow{v_+}$ et $\overrightarrow{v_-}$ du rameur par rapport aux berges, respectivement au cours des trajets B_1 vers B_2 et B_2 vers B_1.

2) En déduire la durée τ de l'aller-retour du rameur entre les bouées.

3) Quelle est la durée τ' mise par un personne marchant sur les berges avec la même vitesse v que celle du rameur par rapport au courant, et qui effectue le même aller-retour entre les bouées ? Comparer les durées τ et τ' (on pourra faire le rapport).

Rép : 1) $\overrightarrow{v_+} = (u+v)\,\overrightarrow{e_x}$; $\overrightarrow{v_-} = (u-v)\,\overrightarrow{e_x}$ **2)** $\tau = \frac{2lv}{v^2-u^2}$; **3)** $\tau' = \frac{2l}{v} < \tau$

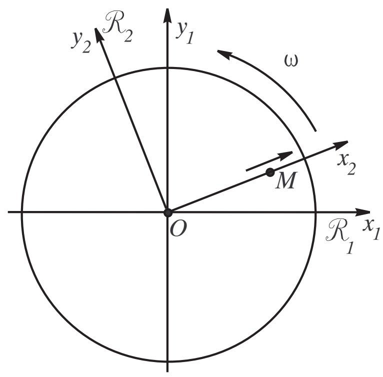
Ex-M8.2 Traversée d'une rivière

Un nageur dont la vitesse par rapport à l'eau est v_1 traverse une rivière de largeur l en suivant une trajectoire perpendiculaire aux berges. Sachant que le courant a une vitesse v_0 uniforme, calculer le temps de la traversée.

Rép : Avant tout calcul, un schéma et la bonne compréhension des référentiels mis en jeu sont ici obligatoires. $\tau = \dfrac{l}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}$

Ex-M8.3 Mouvement radial sur un plateau tournant

Soit le plateau horizontal d'un four micro-onde avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe. $\mathcal{R}_1$ est le référentiel terrestre et $\mathcal{R}_2$ est lié au plateau.



Supposons qu'une fourmi M, égarée (...), survive suffisamment pour décrire à vitesse constante $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_2}}$ l'axe (Ox_2) lié à $\mathcal{R}_2$.

→ Exprimer $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}}$ et $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}}$ dans la base $(\overrightarrow{e_{x_2}}, \overrightarrow{e_{y_2}})$.

Rép : $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}} = v\,\overrightarrow{e_{x_2}} + x_2\omega\,\overrightarrow{e_{y_2}}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}} = -x_2\omega^2\,\overrightarrow{e_{x_2}} + (2\omega v + x_2\dot{\omega})\,\overrightarrow{e_{y_2}}$

Ex-M8.4 Manège d'enfants

Un manège d'enfants tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$. Le propriétaire parcourt la plate-forme (référentiel $\mathcal{R}'$ de repère cartésien $(\overrightarrow{e_x}', \overrightarrow{e_y}', \overrightarrow{e_z}')$) pour ramasser les tickets.
Partant du centre au temps $t = 0$ sans vitesse, il suit un rayon de la plate-forme (qui porte le vecteur $\overrightarrow{e_x}'$) avec un mouvement uniformément accéléré.

1) Établir les équations paramétriques de la trajectoire de l'homme :

1.a) Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au manège ($\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$).

1.b) Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol en utilisant les coordonnées polaire ($r = \dots$ et $\theta = \dots$), en supposant $\theta(t=0) = 0$.

2) Déterminer la vitesse absolue du mouvement de l'homme dans une base judicieusement choisie de $\mathcal{R}$:

2.a) en utilisant les lois de composition des mouvements.

2.b) à partir de l'équation paramétrique de la trajectoire.

3) Reprendre la question **2)** pour l'accélération absolue.

Rép : 1.a) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}at\,\overrightarrow{e_x}'$; **1.b)** $r = \frac{1}{2}at$; $\theta = \omega t$; **2)** $\overrightarrow{v_a} = at\overrightarrow{e_x}' + \frac{1}{2}a\omega t^2\overrightarrow{e_y}'$; **3)** $\overrightarrow{a_a} = \left(a - \frac{1}{2}a\omega^2 t^2\right)\overrightarrow{e_x}' + 2a\omega t\overrightarrow{e_y}'$

Ex-M8.5 **Vitesse en coordonnées cylindriques**

1) Quelle est la vitesse d'un point exprimée dans la base locale des coordonnées sphériques ?
2) Quel est le vecteur rotation du repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ par rapport au repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$?
En déduire une autre méthode de calcul de la vitesse précédente en utilisant les changements de référentiels.

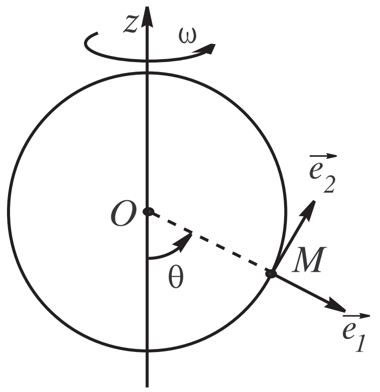
Rép : ➜ Cf Cours **M8.II.2.c)**, p. 4.

■ Dynamique en référentiel non galiléen

M9

Ex-M9.1 **Anneau coulissant sur un cercle en rotation (*, ➜ à voir !)**

Une circonférence de centre O et de rayon R située dans un plan vertical tourne autour d'un de ses diamètres d'un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire ω.
Un anneau M de masse m assimilable à un point matériel est mobile sans frottement sur cette circonférence.
On désigne par θ l'angle que fait OM avec la verticale ascendante.



I - Trouver l'équation du mouvement de M dans $\mathcal{R}$ référentiel tournant lié à la circonférence :
1) à partir de la relation fondamentale de la dynamique ;
2) à partir du théorème du moment cinétique ;
3) à partir de la puissance cinétique ;
4) à partir de la conservation de l'énergie mécanique (qui sera justifiée).
Vérifier qu'on obtient la même équation du mouvement avec les différentes méthodes.

II - On veut étudier l'équilibre relatif de M.
1) Écrire la relation $f(\theta) = 0$ donnant les positions d'équilibre dans $\mathcal{R}$.
2) Déterminer les positions d'équilibre.
3) Étudier la stabilité des différentes positions.

III - On veut que l'équilibre stable corresponde à 30°.
Quelle devra être la vitesse angulaire si $R = 0{,}2\ m$ et $g = 10\ m.s^{-2}$? Calculer la période des petits mouvements autour de cette position.

IV - Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle (dans Rréférentiel lié à la circonférence).
En déduire la nature du mouvement possible (oscillations ou révolutions) suivant la valeur de l'énergie mécanique du point matériel.

Rép : I) $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta + \dfrac{g}{R}\sin\theta = 0$

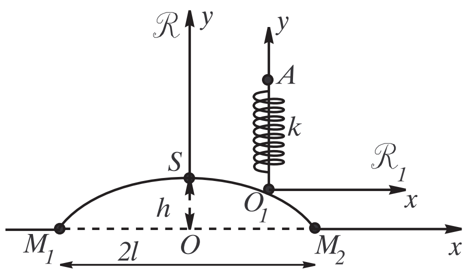
II.1) Il s'agit, bien entendu, de la condition d'équilibre pour ce système conservatif : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)(\theta_{\mathsf{eq}}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta(g - \omega^2 R\cos\theta) = 0$ puisque $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,g} + \mathcal{E}_{p,ie} = -mgR\cos\theta - \dfrac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta$; **II.2)** $\theta_{\mathsf{eq1}} = 0$, $\theta_{\mathsf{eq2}} = \pi$ et deux autres possibilités, dans le seul cas où $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$: $\theta_{\mathsf{eq3}} = \arccos\dfrac{g}{R\omega^2}$ et $\theta_{\mathsf{eq4}} = -\theta_{\mathsf{eq3}}$; **II.3)** Déterminer le signe de $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)(\theta_{\mathsf{eq}})$. En déduire le caractère instable ou stable de chaque position d'équilibre.

III) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{R\sqrt{3}}} \simeq 7,6\ rad.s^{-1}$. Puisqu'on se place dans la situation où $\theta_{\text{eq}} = \theta_{\text{eq3}}$ est un équilibre stable, un petit écart φ depuis cette position d'équilibre va être régi par une équation de la forme $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{2\pi}{T_0}$, d'où $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R\sqrt{3}}{g}} \simeq 1,65s$.

Ex-M9.2 Une tige horizontale AB de longueur l est solidaire d'un axe vertical (Δ) qui tourne avec la vitesse angulaire ω constante. Un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel peut glisser sans frottements sur la tige AB. Il est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige (à une date prise comme origine des temps) en I milieu de AB.
1) Étudier le mouvement de M dans le référentiel du système tournant.
2) À quelle date et avec quelle vitesse arrive-t-il à l'extrémité de la tige ?
3) Donner l'expression de la réaction de la tige sur l'anneau au point B juste avant la chute.

Rép : **1)** en appelant (Ox') la direction de la tige : $OM = x' = \frac{l}{2}\text{ch}\,\omega t$; **2)** $t_1 = \frac{1}{\omega}\text{arcch}\,2$; $v_B = \frac{l\omega}{2}\sqrt{3}$; **3)** $R_{(M=B)} = m\sqrt{g^2 + 3l^2\omega^4}$.

Ex-M9.3 **Mouvement d'un point matériel dans un véhicule accéléré (*)**



Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}$ sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$.
On lui associe un référentiel $\mathcal{R}_1$ (O_1xyz, t) en translation par rapport au référentiel terrestre R$(Oxyz, t)$.
Un point matériel A, de masse m, lié à l'origine O$_1$ par un ressort de raideur k, de longueur naturelle l_0, évolue le long de l'axe (O_1y).
1) Montrer que la composante cartésienne, suivant la verticale ascendante (Oy), de l'accélération de O$_1$ dans $\mathcal{R}$ s'écrit $\dfrac{v^2 f''}{(f'^2+1)^2}$, f' et f'' désignant les dérivées première et seconde de f par rapport à x.
2) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement de A dans $\mathcal{R}_1$.
3) Calculer la tension $\overrightarrow{T}$ du ressort dans le cas où, grâce à une force supplémentaire de frottement visqueux, A acquiert rapidement une position d'équilibre dans $\mathcal{R}_1$. Comparer alors $\overrightarrow{T}$ au poids, dans les cas où la route forme une bosse ou un creux. Conclure, en utilisant la notion de poids apparent.
4) Le profil de la route forme une bosse assimilable à un arc de parabole, M_1SM_2, dont les caractéristique sont données sur la figure ci-jointe. Pour quelle valeur de la vitesse y-a-t-il impesanteur pour A en S ?

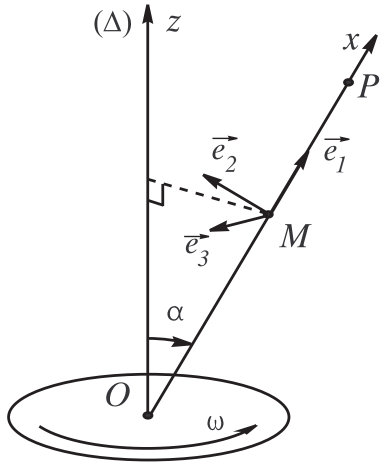
Rép : **1)** $v_{O_1/\mathcal{R}_T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ avec $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'\dot{x} \rightarrow \ldots \rightarrow \ \ddot{y} = \dfrac{v^2 f''}{(1+f'^2)^2}$; **2)** $m\overrightarrow{a_{A/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{F_{\text{élas}}} + m\overrightarrow{g} - m\overrightarrow{a_e}(M)$; **3)** $T = mg + \frac{mv^2 f''}{(1+f'^2)^2}$; **4)** $v = l\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Ex-M9.4 **Pendule 'simple'**
Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m, placé à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur l (et de masse négligeable). L'autre extérmité du fil est fixée en O'.
O' oscille sinusoïdalement suivant la verticale, avec une amplitude D_m et une pulsation ω :
$\overrightarrow{OO'} = D_m \cos\omega t\,\overrightarrow{e_x}$
On désigne par θ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante (Ox), de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements. On note $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le repère associé au référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le repère lié au support du pendule.
1) $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ?
2) Écrire l'expression du théorème du moment cinétique en O'.

3) En déduire que l'équation différentielle du mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ s'écrit sous la forme :
$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t))\sin\theta = 0$ où $h(t)$ est une fonction du temps à préciser.

Rép : 3) $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{D_m\omega^2}{g}\cos\omega t\right)\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t))\sin\theta$.

Ex-M9.5 Anneau sur une tige en rotation autour d'un axe fixe

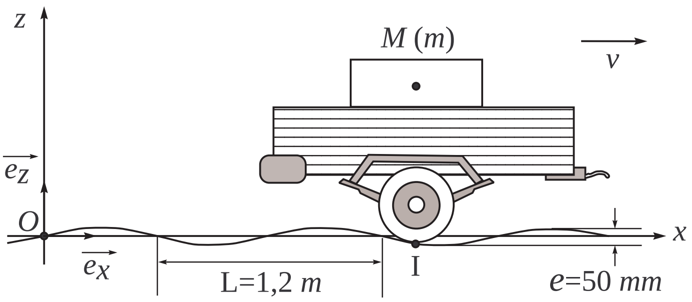


Une tige OP de longueur l est fixée au point O à un axe vertical (Δ) avec lequel elle fait un angle α constant. Un petit anneau de masse m considéré comme ponctuel peut se déplacer sans frottement sur la tige OP. Soit M sa position définie par $OM = x$.
L'ensemble est en rotation uniforme autour de l'axe (Δ) à la vitesse angulaire ω.
1) Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre x_e de l'anneau sur la tige OP que si la vitesse angulaire de rotation est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.
2) Préciser la position de l'anneau pour une vitesse $\omega_1 \geq \omega_0$.
3) Si l'on écarte légèrement l'anneau de cette position lorsqu'elle existe, que se passe-t-il ? Étudier la stabilité de l'équilibre.

Rép : 1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l\sin^2\alpha}}$; **2)** $x_1 = \frac{g\cos\alpha}{\omega_1^2\sin^2\alpha}$; **3) P.F.D.** dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la tige en projection selon Ox : $\ddot{x} - \omega_1^2\sin\alpha\, x = -g\cos\alpha$, de solution $x(t) = x_P + x_G = x_1 + A\exp(-\lambda t) + B\exp(\lambda t)$ avec $\lambda = \sqrt{\omega^2\sin\alpha}$. Comme $x(t) \to \infty$ lorsque $t \nearrow$, l'équilibre est instable.

Ex-M9.6 Une remorque sur une route bosselée

On suppose le référentiel lié au sol terrestre galiléen. On étudie un objet M de masse m posé sur le plateau d'une remorque. La remorque se déplace à une vitesse horizontale $v = cste$ sur une route de profil sinusoïdal.



On suppose les amortisseurs et les pneus de la remorques infiniment rigides.

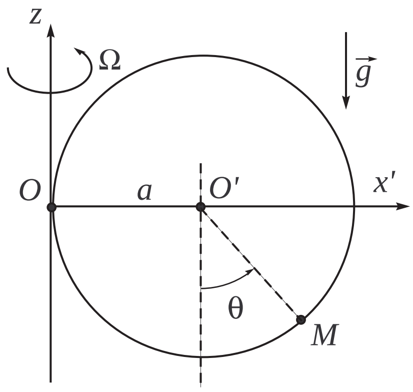
→ Déterminer la vitesse v à partir de laquelle l'objet ne reste plus tout le temps en contact avec le plateau de la remorque.

Méthode et indications pour résoudre ce problème :
- faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur $\mathcal{S} = \{M, m\}$ dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la remorque
- en particulier, montrer que $\overrightarrow{F_{ie}}(M) = -m\ddot{z}_I\,\overrightarrow{e_z}$, avec z_I, l'altitude de I, point géométrique lié à $\mathcal{R}_1$ qui coïncide avec le point de la remorque en contact avec le sol
- exprimer $z_I(t)$ en fonction de e, x et L ; en déduire que $\ddot{z}_I = -\left(\frac{2\pi v}{L}\right)^2 z_I(t)$
- exprimer le **P.F.D.** pour M dans $\mathcal{R}_1$ et en déduire l'expression de la réaction de la remorque sur M en fonction de m, g et $\ddot{z}_I$
- quelle est la condition sur R qui traduit le contact de M avec la remorque ?
- en déduire qu'il y a décollement dès que $\ddot{z}_{I,\min} < -g$; en déduire v.

Rép : $v = \sqrt{\frac{g}{2e}}.\frac{L}{\pi}$

DL nº12 – Mouvement d'un anneau sur un cerceau
d'après CCP TSI 2001 (*)

Un cerceau est assimilable à un cercle de centre O' et de rayon a. Situé dans un plan vertical $(x'Oz)$, il tourne autour d'une de ses tangentes verticales (Oz) à la vitesse angulaire Ω constante.
Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m est mobile sans frottement sur ce cerceau.
On note θ l'angle que fait $O'M$ avec la verticale descendante passant par O' et compté positivement dans le sens trigonométrique.
On note $\mathcal{R}$ le référentiel galiléen $(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'$ le référentiel $O'x'y'z$ lié au cerceau.



I - Utilisation du principe fondamental de la dynamique :

1) Écrire le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}'$. On notera $\overrightarrow{F_{ie}}$, $\overrightarrow{F_C}$ et $\overrightarrow{R}$ respectivement les forces d'inertie d'entraînement, de Coriolis et la réaction du cerceau sur M.
2) Établir l'expression de $\overrightarrow{F_{ie}}$ et montrer que cette force est colinéaire à $\overrightarrow{e_{x'}}$.
3) Établir l'expression de $\overrightarrow{F_C}$ et montrer que cette force est colinéaire à $\overrightarrow{e_{y'}}$.
4) En déduire que l'équation dun mouvement peut s'écrire sous la forme : $a\,\ddot{\theta} = f(\theta)$.
5) Donner l'expression des composantes de la réaction du cerceau dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_\theta})$.

II - Utilisation du théorème du moment cinétique :

1) Définir le moment cinétique du point M en O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et donner son expression.
2) Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
3) En déduire l'équation du mouvement.
4) Peut-on obtenir par ce théorème les expressions des composantes de la réaction du cerceau ? Si oui, donner les expressions correspondantes.

III - Utilisation de l'énergie mécanique

1) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_{ie}}$ dont on donnera l'expression.
2) Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_g}$ dont dérive le poids.
3) Les autres forces dérivent-elles d'une énergie potentielle ? Justifier la réponse. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ du point M en prenant $\mathcal{E}_p(\theta = 0) \equiv 0$.
4) Justifier le fait qu'on puisse appliqer la conservation de l'énergie mécanique.
5) Retrouver l'équation du mouvement par la conservation de l'énergie mécanique.

IV - Étude de l'équilibre relatif

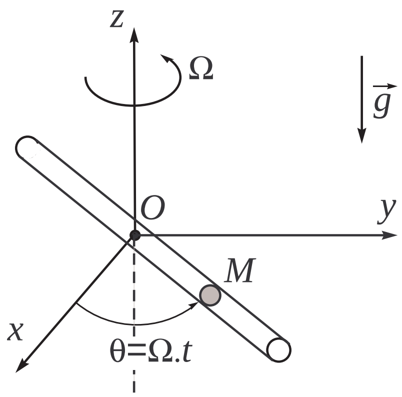
1) Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre est : $a\Omega^2(1 + \sin\theta) = g\tan\theta$
2) Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
3) On désire qu'une position d'équlibre existe pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer la valeur de la vitesse angulaire de rotation correspondante.
4) Cette position d'équilibre est-elle stable ?

DL n°13 – Bille dans un tube [d'après ESTP 1990 (**)]

On veut étudier le mouvement d'une bille de masse m dans un tube rigide de longueur l dans lequel la bille peut se déplacer sans frottements le long de l'axe du tube à l'exclusion de tout autre mouvement. Le tube tourne autour d'un axe passant par son centre O à une vitesse angulaire Ω constante.

On s'intéresse à l'étude de plusieurs positions possibles pour l'axe de rotation. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur terrestre dont le module sera pris égal à $9,81\,m.s^{-2}$.

I - On suppose dans cette partie que le tube tourne dans le plan horizontal autour de l'axe (Oz) vertical.



1) Faire le bilan des forces s'exerçant sur la bille en précisant le référentiel dans lequel on se place. Établir l'équation du mouvement de la bille par rapport au tube.

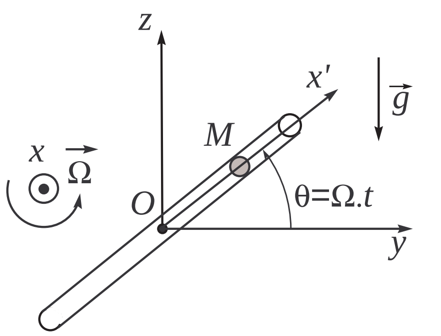
2) Décrire qualitativement le mouvement de la bille en analysant sans aucun calcul l'équation du mouvement.

3) On suppose qu'initialement la bille est à une distance x_0 de O et que sa vitesse est v_0. Expliciter l'équation horaire du mouvement.

4) Dans le cas où $v_0 = 0$, donner l'expression du temps nécessaire pour que la bille quitte le tube.

5) Application numérique :
$\Omega = 2\,rad.s^{-1}$, $l = 10\,m$ et $x_0 = 4\ m$.
$\rightarrow$ Calculer la durée pendant laquelle la bille reste dans le tube.

II - On suppose dans cette partie que le tube tourne dans le plan vertical autour de l'axe (Ox) horizontal.



1) Établir l'équation du mouvement de la bille par rapport au tube.

2) On suppose qu'initialement la bille est à une distance x_0 de O et que sa vitesse est v_0. Expliciter l'équation horaire du mouvement.

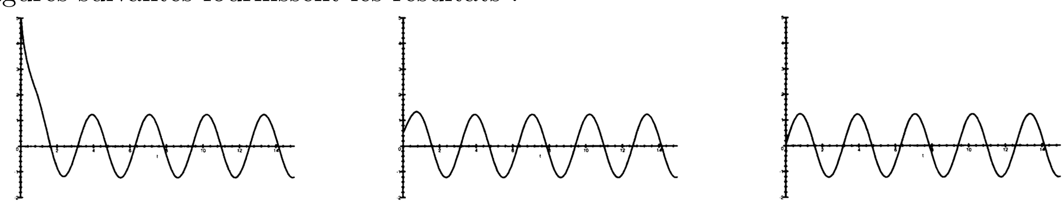
3) Existe-t-il des positions d'équilibre ? Si oui, les préciser.

4) Quelle(s) est (sont) la (les) condition(s) pour que le mouvement de la bille dans le tube soit sinusoïdal ?

5) Lorsque la vitesse initiale vérifie : $v_0 = \dfrac{g}{2\Omega} - x_0\Omega$,
$\rightarrow$ donner l'expression de l'équation horaire du mouvement.

6) On représente à l'aide d'un logiciel de calcul formel l'évolution temporelle de ce mouvement dans le tube pour $v_0 = \dfrac{g}{2\Omega} - x_0\Omega$, $x_0 = l$ et $\Omega = 2\,rad.s^{-2}$, pour (a) $l = 10\,m$, (b) $l = 1\,m$ et (c) $l = 0,1\,m$.

Les figures suivantes fournissent les résultats :



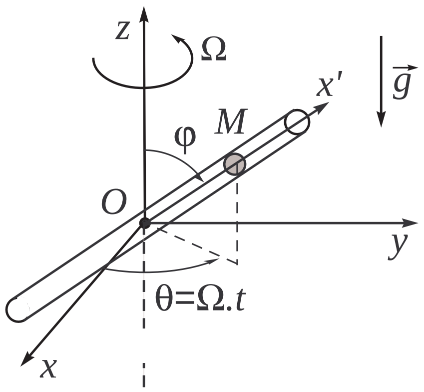
(a) (b) (c)

Allure du mouvement avec (a) $l = 10$ m, (b) $l = 1$ m et (c) $l = 0,1$ m.

Analyser physiquement les observations.

7) Dans quel plan se trouve la réaction du tube ? Exprimer le module de celle-ci.

III - On suppose dans cette partie que le tube tourne dans un plan vertical autour de l'axe (Oz) vertical. De plus le tube fait un angle φ constant avec le plan horizontzal.



1) Établir l'équation du mouvement de la bille par rapport au tube.
2) On suppose qu'initialement la bille est à une distance x_0 de O et que sa vitesse est v_0. Expliciter l'équation horaire du mouvement.
3) Existe-t-il des positions d'équilibre ?
4) Que se passet-il si on écarte la bille de sa position d'équilibre ?
5) Donner l'expression du temps nécessaire pour que la bille quitte le tube en supposant qu'on abandonne la bille sans vitesse en x_0.
6) Calculer sa valeur numérique avec les mêmes données que dans la première partie et $\varphi = 45°$. Comparer le résultat à celui trouvé dans la première partie.
7) Déterminer la réaction du tube.