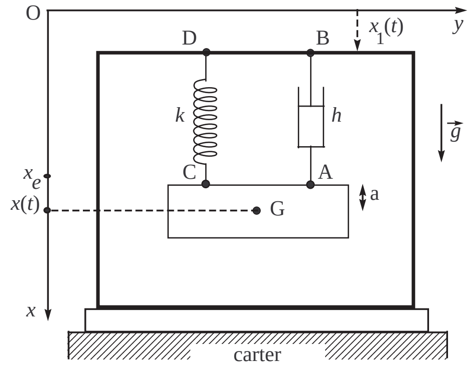
M5

■ Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

Ex-M5.1 Sismographe



on considère un capteur d'amplitude constitué par un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle.
L'amortisseur exerce en A : $\overrightarrow{F_A} = -h\,(\overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B})$
et le ressort exerce en C : $\overrightarrow{T_C} = -k\,(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_0C_0})$.
Le support, le ressort et l'amortisseur sont de masse négligeable.
Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide l_0 (notée D_0C_0).
On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine animée d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b\sin\omega t$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ ((Oxy) étant lié à $\mathcal{R}_0$).
1) Déterminer l'équation que vérifie x_e (position de la masse à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ lorsque $x_1 = 0$).
2) Écrire l'équation différentielle du mouvement de m dans $\mathcal{R}_0$.
Si on pose $X = x - x_1 - x_e$, montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\sin\omega t \qquad \star$$

Résoudre cette équation. (Principe du sismographe.)

Rép : 1) Écrire, pour la masse m, le **P.F.D.** à l'équilibre ① → $x_e = l_0 + \dfrac{mg}{k} + a$
2) Écrire le **P.F.D.** hors équilibre ②; ② − ① → $m\ddot{x} = -k(x(t) + x_1 - x_e) - h(\dot{x} - \dot{x}_1)$.
D'où $\star$ avec $A = b\omega^2$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$, de solution $X(t) = X_m\sin(\omega t + \varphi)$, avec $X_m = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$. Au final : $x(t) = X(t) + x_1(t) + x_e$.

Ex-M5.2 Déphasage de la vitesse par rapport à la force excitatrice

Soit $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t)$ l'équation du mouvement d'un oscillateur soumis à une force excitatrice $f(t) = F_m\cos(\omega t + \psi)$.
→ Calculer, en régime forcé :
1) le déphasage φ_v de la vitesse $v(t)$ par rapport à la force ; en particulier, montrer que :

$$\sin\varphi_v = \frac{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)V_m}{\dfrac{F_m}{m}} \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi_v = \frac{2\alpha V_m}{\dfrac{F_m}{m}}$$

(Que représentent ω_0, V_m et α ?)
2) la travail $\mathcal{T}$ fourni à chaque période T, par la force à l'oscillateur.

Rép : 2) Partir du travail élémentaire fourni par le force excitatrice : $\delta\mathcal{T} = f(t).\mathrm{d}x = f(t).v(t)\mathrm{d}t = F_m\cos(\omega t + \psi).V_m\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \dfrac{F_mV_m}{2}[\cos(\psi - \varphi) + \cos(2\omega t + \psi + \varphi)]\mathrm{d}t$.
Sur une période $\mathcal{T} = \displaystyle\int_0^T \delta\mathcal{T}\ \ldots \to \mathcal{T} = \frac{hV_m^2}{2}T$

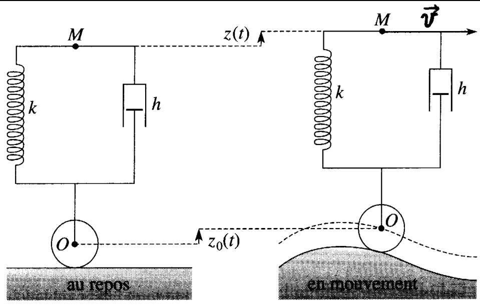
Ex-M5.3 Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée

Une automobile est sommairement modélisée par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h. En routes circonstances, l'axe OM reste vertical.
On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v sur une route

dont le profil impose au centre O de la roue une élongation

$$z_O(t) = a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

par rapport à sa position d'équilibre.
On repère le mouvement de la masse par son élongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos.



On rappelle qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O : $\overrightarrow{F_r} = -h(\dot{z}_M - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$.

1) Établir l'équation différentielle en *z(t)* du mouvement de la masse , lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v.

2) Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.

3) À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

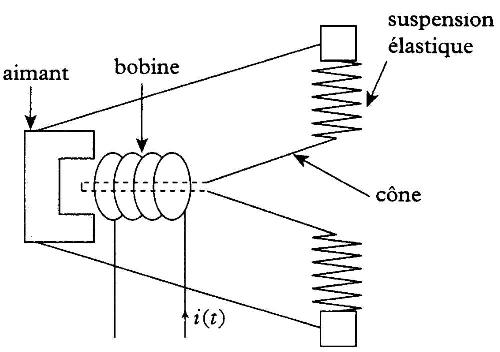
Rép : 1) $m\ddot{z} = -k(z(t) - z_O(t)) - h(\dot{z} - \dot{z}_O)$, avec $z_O = a\cos(\omega t)$, comme $x = v.t$ et en posant $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$; $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_O(t) + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z}_O(t)$, en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$; **2)**

$$Z_m = \frac{a\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

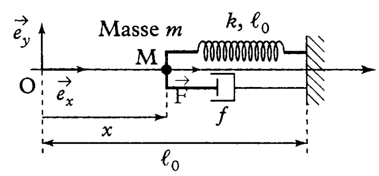
Ex-M5.4 Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$. Cette masse m, assimilée à un point matériel $M\ (m)$, est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f. Elle est soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur.
On a : $F(t) = K\,i(t)\,\overrightarrow{e_x}$, avec K une constante.
On travaille dans le référentiel terrestre considéré galiléen $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
On suppose que le courant $i(t)$ est sinusoïdal : $i(t) = I_m\cos(\omega t)$

Données : $m = 10\,g$; $k = 15\,000\,N.m^{-1}$; $K = 200\,N.A^{-1}$ et $I_m = 1\,A$.



Modèle mécanique



1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m.

2) La normaliser. On veut $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Calculer alors la valeur du cœfficient f.

3) Déterminer l'expression de la réponse forcée $x(t)$ et la mettre sous la forme $X_m\cos(\omega t + \varphi)$.
Donnée : $\omega = 6\,280\,rad.s^{-1}$

4) Tracer l'allure de la courbe donnant $\omega \to X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.

Rép : 1) $\ddot{x} + \dfrac{f}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{K}{m}I_m\cos(\omega t)$; **2)** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{f} = \dfrac{\sqrt{km}}{f}$
A.N. : $f \simeq 17,3\ kg.s^{-1}$ (ou $N.s.m^{-1}$) ; **3)** $\omega_0 \simeq 1\,225\ rad.s^{-1}$, $\omega = 6\,280\ rad.s^{-1}$, $X_m = 0,5\ mm$ et $\varphi = -164° = -2,86\ rad$, soit : $x(t) = 0,5.10^{-3}\cos(6\,280t - 2,86)$ (en m) ;

4) $X_m(\omega_c) = \dfrac{KI_m}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_c^4}{\omega_0^4}}} = \dfrac{X_m(\text{max})}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0$

Ex-M5.5 **Pourquoi le ciel est-il bleu ?**

THOMSON a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome ; $\overrightarrow{F_e} = -k\,\overrightarrow{OM}$). Nous supposerons que ce électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnelle à sa vitesse $\overrightarrow{F_r} = -h\,\overrightarrow{v}$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique $\overrightarrow{E}(t) = E_0\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$, de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de THOMSON.

6 Données : $m = 9,1.10^{-31}\,kg$; $e = 1,6.10^{-19}\,C$; $k = 100\,N.m^{-1}$; $h = 10^{-20}\,kg.s^{-1}$.

1) Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser. (« la normaliser »= comprendre qu'il faut l'écrire sous sa forme « canonique »).

2) Déterminer le régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle).

3) Simplifier l'expression précédente sachant que le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'onde s'étendant de $\lambda_b = 400\,nm$ (bleu) à $\lambda_r = 800\,nm$ (rouge), longueurs d'onde du champ $\overrightarrow{E}(t)$.

4) Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Rép : 1) $\ddot{\overrightarrow{OM}} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\overrightarrow{OM}} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = -\dfrac{e}{m}\overrightarrow{E}(t)$, avec $\omega_0 = \sqrt{km}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$; **2)** $\overrightarrow{OM}(t) = X_m\cos(\omega t+\varphi)\,\overrightarrow{e_x}$, avec $X_m = \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$;

3) $\lambda_{b/r} = \dfrac{2\pi c}{\omega_{b/r}}$ (➜ Cf Cours **O1.I.1.a)** : $\lambda = c.T = c.\dfrac{2\pi}{\omega}$), comparer les valeurs de ω_b, ω_r avec celle de ω_0, en déduire : $X_m \simeq \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}$ et $\varphi \simeq \pi$; **4)** Comme $\ddot{\overrightarrow{OM}} \simeq \dfrac{e\omega^2}{m\omega_0^2}E_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$, on a $<\mathcal{P}_{b/r}>= K \times \text{(amplitude de l'accélération)}^2 = K\left(\dfrac{e\omega_{b/r}^2}{m\omega_0^2}E_0\right)^2$, soit $\dfrac{<\mathcal{P}_b>}{<\mathcal{P}_r>} = \left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 = 16.$

Les deux **DL** qui suivent sont la suite du **DL6** (➜ Cf Ex. Mécanique, p.26-27) qui étudiait le comportement d'une suspension sur une route plane.
→ Il faut donc avant tout revoir le **DL6**(et sa correction, p. 28-29) pour bien comprendre ce qui va suivre !!
Le **DL8** qui traite de l'analogie électromécanique relève de l'électrocinétique :
➜ Cf Cours **E4** et **E5**.

DL n°7 – Comportement Routier d'une Automobile

Concours EIA 1999 [ATS et TSI] (suite, *)

Étude de la réponse harmonique

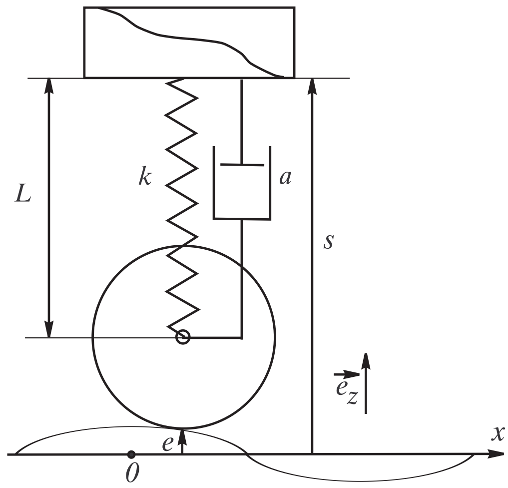
1) On étudie maintenant le **comportement sur une route difficile** du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun (soit une masse m et le quart de la masse M du châssis pour chaque suspension).

$z'_0 = s_0$ note toujours la garde au sol du châssis chargé par $4m$ sur un sol horizontal.

1.a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la côte de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e(x) = e_m \cos(\gamma\, x)$$

Quelle est la distance λ entre deux bosses exprimée en fonction de γ ?
Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse constante V ?



1.b) On repère maintenant le châssis par sa position $s(t)$ par rapport à la côte de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen.
Exprimer, selon $\overrightarrow{e_z}$, la force de frottement due à l'amortisseur en fonction de a, $\dot{s}$ et $\dot{e}$.
Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ du châssis est de la forme :

$$\boxed{\ddot{s} + \alpha'\, \dot{s} + \beta'\, s = f + \delta' \qquad (\star)}$$

où f est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et de $\dot{e}$.

2) On étudie le **régime forcé permanent**.
2.a) Quelle est la signification de cette expression ?

2.b) On utilise les notations complexes : $\underline{e} = e_m\, e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\, e^{j\omega t}$, $\underline{s}$ étant la solution de l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha'\, \dot{\underline{s}} + \beta'\, \underline{s} = \underline{f}.$$

Expliquer pourquoi on ne tient pas compte du terme δ' dans $(\star)$ pour étudier les oscillations du châssis autour de sa position d'équilibre s_0.
Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m, ω, α' et β'.
Puis, l'écrire sous la forme :

$$\boxed{\underline{S} = e_m \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

où $\Omega \equiv \dfrac{\omega}{\omega'_0}$ est la pulsation réduite, ω'_0 et Q étant les constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β', puis de a, k, M et m.

2.c) En déduire l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q. Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

2.d) Montrer que S atteint un maximum S_m pour une pulsation réduite Ω_m que l'on déterminera en fonction de Q, et démontrer que $\boxed{\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \Omega_m^4}}}$.

2.e) Calculer Q, Ω_m et $\dfrac{S_m}{e_m}$.

2.f) Tracer avec soin le graphe (ou l'allure du graphe si la question précédente n'a pas été faite) donnant $\dfrac{S}{e_m}$ en fonction de Ω dans la plage $0 \leq \Omega \leq 10$.

2.g) Calculer la pulsation propre ω'_0. En déduire la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 $km.h^{-1}$. Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?

Indications et réponses partielles : (résultats utilisables pour répondre aux questions suivantes)

1.a) $\lambda = \dfrac{2\pi}{\gamma}$; $\omega = \gamma V$ – **1.b)** $f(t) = \alpha' \, \dot{e}(t) + \beta' \, e(t)$

2.b) $\omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\dfrac{4k}{M+4m}}$; $Q = \sqrt{\dfrac{M+4m}{4M}}$

2.d) Poser $u \equiv \Omega^2$ et dériver $\left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2$ par rapport à $u \ldots \rightarrow \Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1+\dfrac{2}{Q^2}}-1}$

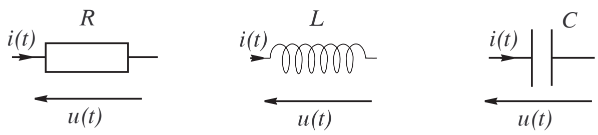
DL n°8 – Comportement Routier d'une Automobile

Concours EIA 1999 [ATS et TSI] (suite et fin, *)

Analogie électrique

1) Le comportement du véhicule peut être simulé par un circuit électrique. On se propose, ici, d'étudier celui qui représente au mieux la réponse harmonique du véhicule sur route dégradée du **DL7**.

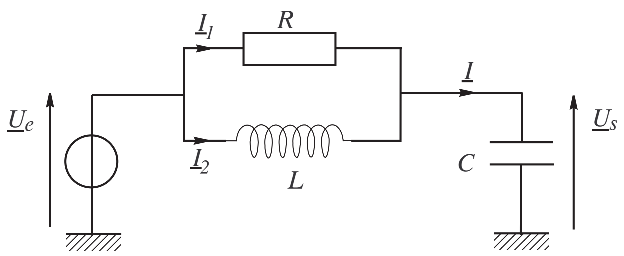
1.a) Rappeler les équations différentielles reliant le courant $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ dans chacun des trois dipôles ci-dessous.



1.b) En déduire les relations entre leurs amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ en régime sinusoïdal de pulsation ω imposée.

2) Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale $\underline{u}_e$ de pulsation ω.

2.a) Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de ce circuit.



2.b) Quelles grandeurs d'entrée $\underline{G}_e$ et de sortie $\underline{G}_s$ doivent être choisies pour obtenir une **fonction de transfert harmonique** équivalente à la question **DLn°7.2.b)**, c'est-à-dire telles que :

$$\boxed{\frac{\underline{G}_s}{\underline{G}_e} = \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

où $\Omega \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, ω_0 une pulsation propre et Q un rapport caractéristique dont on déterminera les expressions en fonction de R, L et C.

3) Pour préciser l'analogie électrique au modèle mécanique, il faut établir **l'équivalence des paramètres** mécanique $m + \dfrac{M}{4}$, k, a et électriques R, L, C.

3.a) Quelle est la **puissance moyenne** dissipée dans la résistance R en fonction de l'amplitude U_e, de R, L, C et ω ?

3.b) On note V_e l'amplitude de la vitesse $\dot{e}$ verticale de la roue dans **DLn°13.2)** due à la déformation sinusoïdale de la route, et V_s celle de la vitesse $\dot{s}$ du châssis. On donne également l'expression de la **puissance moyenne** dissipée par frottement dans l'amortisseur en fonction de a, k, M et m : $< \mathcal{P}_f >= \frac{1}{2}\,aV_e^2\,\frac{\omega^4}{(\beta'-\omega^2)^2+\alpha'^2\omega^2}$

En comparant les expressions des deux puissances moyennes, ainsi que celles des deux fonctions de transfert **DLn°12.2.b)** et **DLn°13.2.b)**, trouver les équivalents électriques de a, k, $m+\frac{M}{4}$ et V_s.

Indications et réponses partielles : (résultats utilisables pour répondre aux questions suivantes)

2.a) $\underline{Z} = \dfrac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R + jL\omega)}$ – **2.b)** Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$. → d'où le résultat, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$.

3.a) $< \mathcal{P}_J >= \dfrac{1}{2}RI_1^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{U_R^2}{R} = ... = \dfrac{1}{2R}\,\dfrac{L^2C^2\omega^4}{(1-LC\omega^2)^2+\dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2$.

Solution DL n°7 :

Premièrement : ➜ Cf **DL6** ! ! . . . ensuite : remarquons que sur le schéma et dans l'énoncé, la côte z par rapport à l'horizontale est désormais notée s !

1) Comportement sur une route difficile du véhicule chargé.

1.a) • la période spatiale ('distance entre deux bosses') correspond à $\gamma\lambda = 2\pi$ → $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{\gamma}}$

• Le véhicule roule selon (Ox) à la vitesse $V = cte$, donc, (avec un choix judicieux de l'origine des temps), $x = Vt$ et $e(x)$ peut s'écrire explicitement en fonction du temps t :

$$e(t) = e_m\cos(\gamma x) = e_m\cos(\gamma V\,t) = e_m\cos(\omega t) \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \gamma V = 2\pi\frac{V}{\lambda}}$$

Ce qui se retrouve en écrivant que la durée de parcours entre deux bosses est $T = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

1.b) • La force de frottement exercée par l'amortisseur sur le châssis est proportionnelle à la différence de vitesse de ses extrémités : $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot{z}_C - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,(\dot{s}-\dot{e})\,\overrightarrow{e_z}$.

Donc, selon $\overrightarrow{e_z}$: $\boxed{F_{\text{frot}} = -a\,(\dot{s}-\dot{e})}$

• L'équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est toujours :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} \quad (1'')$$

Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4}\,\ddot{s} = -k(L-L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} - a\,(\dot{s}-\dot{e}) \quad (2'')$$

Soit, en faisant $(2'')-(1'')$, avec $L - L'_e = s - e - z'_0$:

$$\boxed{\ddot{s} + \alpha'\,\dot{s} + \beta'\,s = f + \delta' \quad (\star) \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{4a}{M+4m} \quad \beta' = \frac{4k}{M+4m} \quad \delta' = \frac{4k}{M+4m}\,z'_0}$$

$$\text{et} \quad \boxed{f = \alpha'\,\dot{e} + \beta'\,e}$$

2) Régime forcé permanent.

2.a) Le régime forcé permanent est le régime des oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposées au système une fois que le régime transitoire a disparu.
Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Il est de forme sinusoïdale et de pulsation ω.

2.b) • On cherche à résoudre, en notation complexes ($\underline{e} = e_m\, e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\, e^{j\omega t}$), l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha'\, \dot{\underline{s}} + \beta'\, \underline{s} = \underline{f}.$$

• On ne tient pas compte du terme δ' dans ($\star$) parce que seules les oscillations du châssis nous intéresse ; or δ' n'intervient que par l'ajout d'une constante ($z'_0 = s_0$) dans la solution particulière. (Négliger δ' revient, finalement, à translater le repère à la position d'équilibre s_0.)
• En complexes, il vient : $\underline{S}\,(\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha') = e_m\,(\beta' + j\omega\alpha')$, soit :

$$\boxed{\underline{S} = e_m\, \frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}} \text{ qui peut s'écrire : } \boxed{\underline{S} = e_m\, \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega'_0}}$ $\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\dfrac{4k}{M + 4m}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{\omega'_0}{\alpha'} = \sqrt{\dfrac{M + 4m}{4M}}}$

2.c) Donc : $\boxed{S = |\underline{S}| = e_m \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}{(1 - \Omega^2)^2 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}}}$. Et lorsque $\Omega = 1$, $\boxed{S_{(\Omega=1)} = e_m\sqrt{1 + Q^2}}$.

2.d) • On pose $u = \Omega^2$ et on dérive $g(u) = \left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u}{Q^2}}{(1-u)^2 + \dfrac{u}{Q^2}}$ par rapport à u :

$\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = ... \to$ cette dérivée s'annule pour : $\dfrac{1}{2Q^2}\, u^2 + u - 1 = 0.$
Or, ce polynôme n'a qu'une seule racine positive ($u > 0\,!$) qui est :

$$u_m = Q^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1\right) \Longrightarrow \boxed{\Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1}}$$

Ω_m est la pulsation réduite de résonance correspondant à une résonance des oscillations du châssis roulant sur la route ondulée.

• $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u_m}{Q^2}}{(1-u_m)^2 + \dfrac{u_m}{Q^2}}$, avec, par définition de u_m : $\dfrac{1}{2Q^2}\, u_m^2 + u_m - 1 = 0$

Soit : $\dfrac{u_m}{Q^2} = \dfrac{2 - 2u_m}{u_m}$. Donc :

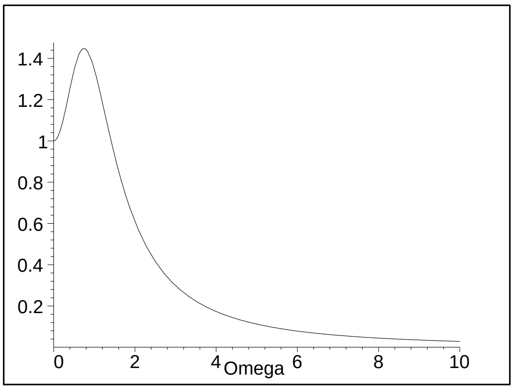
$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\dfrac{2 - u_m}{u_m}}{(1-u_m)^2 + 2\,\dfrac{1 - u_m}{u_m}} = \frac{2 - u_m}{u_m(1-u_m)^2 + 2\,(1-u_m)} = \frac{2 - u_m}{(1-u_m)(u_m - u_m^2 + 2)}$$

Soit : $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{2 - u_m}{(1-u_m)(2-u_m)(1+u_m)} = \dfrac{1}{1 - u_m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \Omega_m^4}}}$

2.e) AN : $\boxed{Q = 0,59 \qquad \Omega_m = 0,75 \qquad \dfrac{S_m}{e_m} = 1,2}$.

Rq : Situation où le facteur de qualité est faible, pour avoir une faible acuité à la résonance $\dfrac{S_m}{e_m}$.

2.f) Cf. graphe ci-contre.



2.g) • Valeur de la pulsation propre du système :

$$\boxed{\omega_0' = \sqrt{\frac{4k}{M+4m}} = 2\sqrt{\frac{44\,100}{1\,400}} = 11,2\ rad.s^{-1}}$$

• Pour être à la résonance, il faut que

$$\omega = \omega_m = \Omega_m\,\omega_0' = 0,75\omega_0' = 8,4\ rad.s^{-1}$$

Or, $\lambda = VT = V\,\dfrac{2\pi}{\omega}$, donc, la distance λ_m entre les ondulations du sol qui commande la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à vitesse V constante est :

$$\boxed{\lambda_m = V\,\frac{2\pi}{\omega_m} = V\,\frac{2\pi}{0,75\omega_0'} = 18,7\ m}$$

• Si les déformations sont plus rapprochées, $\lambda < \lambda_m$, soit $\omega > \omega_m$; on sort donc de la zone de résonance et les oscillations de la route sont alors mieux absorbées par le véhicule : $\dfrac{S}{e_m} < \dfrac{S_m}{e_m}$.

Solution DL n°8 :

1.a) En convention récepteur :

$$\boxed{u_R = R\,i_R \qquad u_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad i_C = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{du_C}{dt}}$$

1.b) Aux trois relations précédentes correspondent les relations entre amplitudes complexes (en posant $\underline{i} = \underline{I}\,e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U}\,e^{j\omega t}$) :

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I_R} \qquad \underline{U}_L = jL\omega\,\underline{I}_L \qquad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega}\,\underline{I}_C$$

2.a) L'impédance du circuit est : $\underline{Z} = \underline{Z}_R // \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \dfrac{jLR\omega}{R+jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}$.

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R+jL\omega)}}$$

2.b) Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$:

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{R+jL\omega}{R - RCL\omega^2 + jL\omega} = \frac{1 + j\,\dfrac{L\omega}{R}}{1 - CL\omega^2 + j\,\dfrac{L\omega}{R}}$$

Soit : $\boxed{\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$ avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

3.a) La puissance dissipée par effet Joule est en moyenne :

$$<\mathcal{P}_J> = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\,dt = \frac{1}{2}\,RI_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{U_R^2}{R} = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2\omega^2}{1+\dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,I^2 = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2\omega^2}{1+\dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,\frac{C^2\omega^2\left(1+\dfrac{L^2\omega^2}{R^2}\right)}{(1-LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2$$

$$\boxed{<\mathcal{P}_J> = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2C^2\omega^4}{(1-LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2}$$

3.b) La puissance dissipée par frottement visqueux dans l'amortisseur est en moyenne :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{1}{T}\int_0^T |\overrightarrow{F}_{\text{frot}} \cdot (\dot{s}-\dot{e})\,\overrightarrow{e_z}|dt = \frac{1}{T}\int_0^T a\,(\dot{s}-\dot{e})^2 dt = a < (\dot{s}-\dot{e})^2 >.$$

Pour calculer $(\dot{s}-\dot{e})$, il faut prendre la partie réelle de $(\underline{\dot{s}}-\underline{\dot{e}})$, avec, d'après **DL7.2.b)** :

$$\underline{s} = \underline{e}\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} \qquad \text{et donc :} \qquad \underline{\dot{s}} = \underline{\dot{e}}\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}$$

ce qui donne : $\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}} = \underline{\dot{e}}\,\dfrac{\omega^2}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} = \underline{\dot{e}}\,\dfrac{\omega^2(\beta' - \omega^2 - j\omega\alpha')}{(\beta'-\omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}$.

Et donc : $\mathcal{R}e(\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}}) = \dot{s} - \dot{e} = \dfrac{V_e\,\omega^2}{(\beta'-\omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}\left((\beta'-\omega^2)\cos\omega t + \alpha'\omega\sin\omega t\right)$.

Alors : $< \mathcal{P}_f >= a < (\dot{s}-\dot{e})^2 >$, ce qui donne :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{V_e^2\,\omega^4}{((\beta'-\omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2)^2}\Big((\beta'-\omega^2)^2 \underbrace{< \cos^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} + \alpha'^2\omega^2 \underbrace{< \sin^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} + 2(\beta'-\omega^2)\alpha'\omega \underbrace{< \cos(\omega t)\sin(\omega t) >}_{0}\Big).$$

Finalement : $$\boxed{< \mathcal{P}_f >= \frac{1}{2}\,aV_e^2\,\frac{\omega^4}{(\beta'-\omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2} = \frac{1}{2}\,aV_e^2\,\frac{\left(\dfrac{m+M/4}{k}\right)^2\omega^4}{\left(1 - \dfrac{m+M/4}{k}\,\omega^2\right)^2 + \dfrac{a^2}{k^2}\,\omega^2}}$$

3.c) la comparaison des deux expressions des puissances moyennes dissipées par le système mécanique en suspension et le circuit électrique permet d'identifier les **équivalences électromécaniques** suivantes :

$$\boxed{a \longleftrightarrow \frac{1}{R} \qquad k \longleftrightarrow \frac{1}{L} \qquad m + \frac{M}{4} \longleftrightarrow C \qquad V_s \longleftrightarrow U_s}$$

Rq : Pour la dernière analogie, comparer $\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ avec $\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$.