■ travail, énergie potentielle, énergie cinétique et énergie mécanique

➜ Bien regarder les fiches Méthodes M2/M3

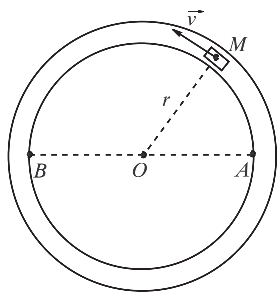
Ex-M3.1 **Chute verticale avec frottement :**
Une masse ponctuelle $m = 200\ g$ est lancée vers le haut depuis le point A avec une vitesse initiale $v_A = 10\ m.s^{-1}$.
En supposant la force de frottement verticale, d'intensité constante $f = 0,50\ N$, calculer (sans calculatrice) :
1) La hauteur $h = AB$ dont elle est montée
2) sa vitesse v'_A quand elle repasse par le point de lancement.
Données : On oriente la verticale Oz vers le haut. $g = 10\ m.s^{-2}$ et $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,77$.
Rép : Corrigé complet sur le Blog

➜ Cf Blog **1)** $h = z_B - z_A = \dfrac{v_A^2}{2\left(g + \frac{f}{m}\right)} = 4,0\ m$; **2)** $v'_A = v_A\sqrt{\dfrac{mg - f}{mg + f}} \approx 7,7\ m.s^{-1}$.

Ex-M3.2 **Vitesse d'un pendule**
On accroche une bille de masse $m = 200\ g$ au bout d'un fil de masse négligeable et de longueur $l = 1\ m$.
On lâche la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle $\theta_0 = 15°$ avec la verticale.
1) Quelle est la vitesse v_m lors de son passage par la position verticale ?
2) Établir par deux méthodes puis calculer la période de ce pendule en suposant que le mouvement vérifie l'hypothèse des petites oscillations.
Rép : **1)** $v_m = 0,82\ m.s^{-1}$; **2)** $T_0 = 2,0\ s$.

Ex-M3.3 **Vitesse minimale**
Un point matériel M soumis à la pesanteur et à une force de frottement fluide opposée à la vitesse est lancé avec une vitesse initiale inclinée d'un angle α avec le plan horizontal.
En appliquant seulement le théorème de la puissance cinétique (et sans aucun calcul de trajectoire), montrez que la vitesse (en norme) est minimale **après** le sommet de la trajectoire.

Ex-M3.4 **Frottement fluide**
Un véhicule assimilé à un point matériel M, est en mouvement circulaire (rayon r) uniforme (vitesse de norme v). La force de frottement fluide agissant sur le véhicule est du type : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.



→ Déterminer le travail W de cette force lorsque le véhicule part de A et arrive en B après n tours complets. Commenter le résultat obtenu.
Rép : $W = -\alpha v 2\pi r\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$

Ex-M3.5 **Glissement d'un solide sur un plan incliné**
Résoudre l'exercice **Ex-M2.9** par un raisonnement énergétique. Par ailleurs, on ajoute la question suivante lorsqu'on tient compte du coefficient de frottement solide f :
➜ Quelle est la vitesse minimale $v_{A,\mathrm{min}}$ (exprimée en fonction de f, g, H et α) qu'il faut communiquer au point matériel M initialement placé en A pou qu'il puisse atteindre le point O.
Indication : Résoudre cet exercice en appliquant le **Th**$\mathcal{E}_k$:
- pour le mouvement de O vers A :

$$\Delta\mathcal{E}_{k,O\to A} = W_{O\to A}(\overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}) \qquad \text{avec} \quad \Delta\mathcal{E}_{k,O\to A} = \mathcal{E}_{k,A} - \mathcal{E}_{k,O}$$

(Dans ce cas, que vaut la vitesse initiale en O ?)
- comme pour le mouvement de A et O :

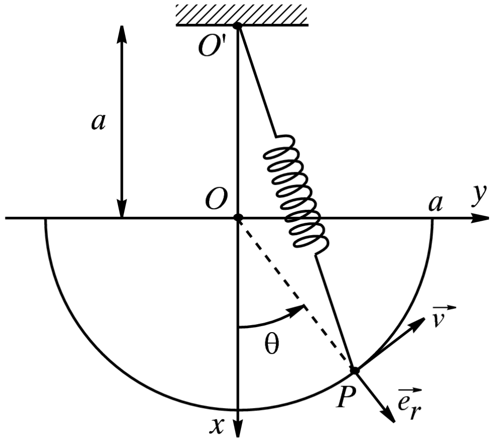
$$\Delta\mathcal{E}_{k,A\to O} = W_{A\to O}(\overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}) \qquad \text{avec :} \quad \Delta\mathcal{E}_{k,A\to O} = \mathcal{E}_{k,O} - \mathcal{E}_{k,A}$$

(Dans ce cas, que vaut la vitesse finale en O lorsque $v_A = v_{A,\mathsf{min}}$?)

Rép : $v_{A,\mathsf{min}} = \sqrt{2gH(1+f.\mathrm{cotan}\,\alpha)}$

Ex-M3.6 Force élastique / stabilité d'un équilibre

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ de repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Une perle quasi ponctuelle P, de masse M est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a. Le point P est attaché à un ressort $(k,\ l_0)$ dont l'autre extrémité est fixée en O' $(OO' = a)$. le point P est repéré par l'angle $\theta = (Ox, OP)$.



1) a) Exprimer $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de a et θ dans la base polaire. En déduire l'expression du module $O'P$.

b) exprimer la tension $\overrightarrow{T}$ du ressort en fonction de a, k, l_0 et θ dans la base polaire.

2) a) Comment s'exprime la vitesse de P dans $\mathcal{R}_g$ dans la base polaire ?

b) On note $\overrightarrow{F}$ la résultante des forces exercées sur P. Donner l'expression de la puissance de cette résultante dans $\mathcal{R}_g$ en fonction de θ et $\dot{\theta}$.

En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ (à une constante près) dont dérive la résultante.

3) a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres : $a = \dfrac{2Mg}{k}$ et $l_0 = \sqrt{3}\left(a - \dfrac{Mg}{k}\right)$.

→ Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour θ positif ?

b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

c) Quelle est la période T des petites oscillations de P autour de la position d'équilibre stable ?

Rép : 3.a) $\mathcal{E}_p = Mga\left(\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ et chercher θ_e tel que $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)(\theta_e) = 0$;

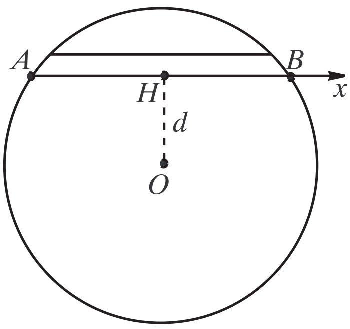
3.c) Poser $\theta = \theta_e + \epsilon$ et montrer que ϵ vérifie $\ddot{\epsilon} + \omega^2\epsilon = 0$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, soit : $\epsilon(t) = \epsilon_m \cos(\ t + \varphi)$ avec $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$.

Ex-M3.7 Force de gravitation et tunnel terrestre

On démontre que pour tout point M de masse m situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r du centre O de la terre, l'attraction terrestre est une force agissant en ce point M dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$$\overrightarrow{F} = -mg_0\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$$

où R est le rayon de la Terre et $r = OM$. ($R = 6,4.10^6\ m$ et $g_0 = 10\ m.s^{-2}$.)



1) Quelle est l'énergie potentielle de M (en supposant que $\mathcal{E}_p = 0$ pour $r = 0$) ?

2) On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par O et traversant la Terre. On note d la distance OH du tunnel au centre de la Terre.

Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Il part du point A de la surface terrestre sans vitesse initiale.

→ Quelle est sa vitesse maximale v_m au cours du mouvement ? **A.N.** avec $d = 5.10^6\ m$.

→ Exprimer $\overline{HM} = x$ en fonction du temps t par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.

3) Représenter et commenter le graphe de $\mathcal{E}_p(x)$; $\mathcal{E}_p(x)$ étant l'énergie potentielle de gravitation de M. Décrire le mouvement de M à partir de sa position initiale en A.

Rép : 1) $\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}\dfrac{mg_0}{R}r^2$; **2)** $v_m = \sqrt{g_0\left(R - \dfrac{d^2}{R}\right)} = 5.10^3\ m.s^{-1}$ et $x(t) = -\sqrt{R^2 - d^2}\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g_0}{R}}$; $\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}\dfrac{mg_0}{R}(d^2 + x^2) = ax^2 + b$ et $\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_{p,\max} = \mathcal{E}_p(A) = \mathcal{E}_p(B)$ ou encore $\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_{k,\max} + \mathcal{E}_{p,\min} = \mathcal{E}_m(H)$. Oscillations périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Ex-M3.8 Planeur :

Un planeur et son pilote (masse totale $m = 310\ kg$) volent à vitesse constante ($v_0 = 110\ km.h^{-1}$) en air calme.

1) Calculer le travail W_0 des forces de frottements lorsque le planeur descend de $2\,200\ m$ d'altitude à $700\ m$.

2) La finesse du planeur est de 38 (la finesse est le nombre de kilomètre(s) parcouru(s) horizontalement pour une perte d'altitude de 1 km en air calme). → Calculer l'intensité de la force de frottements $\overrightarrow{f}$.

On exposera clairement les hypothèses faites et les raisons de leurs choix.

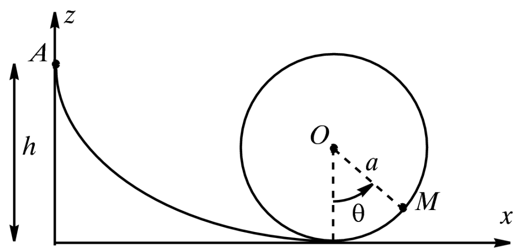
3) Dans une « pompe » (courant ascendant qui permet au planeur de prendre de l'altitude), le planeur monte de $700\ m$ à $2\,200\ m$ d'altitude. → En supposant que $W(\overrightarrow{f}) = W_0$, estimer le travail W_a fourni par les forces des courants ascendants au système {planeur+pilote}.

➜ Cf Blog **Rép :** Corrigé complet sur le Blog

1) $W_0 = -4,6.10^6\ J$; **2)** $f \approx -80\ N$; **3)** $W_a = -2W_0 \approx -9,1.10^6\ J$.

Ex-M3.9 Toboggan

Un point matériel M se déplace sans frottements à l'intérieur d'une gouttière circulaire (toboggan terminé par un cercle de rayon a). Il est lâché en A, d'une hauteur h, sans vitesse initiale. On note g l'intensité du champ de pesanteur.



1) Exprimer en fonction de a, h, g et θ la norme v_M de la vitesse du point M lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.

2) De quelle hauteur $h_{\min}$ doit on lâcher le point matériel sans vitesse initiale en A pour qu'il arrive jusqu'au point le plus haut du demi-cercle ($\theta = \pi$).

3) Dans ces conditions, donner l'expression de la réaction du support au point I d'entrée du demi-cercle ($\theta = 0$).

4) Déterminer les limites h_1 et h_2 telles que :

a) si $h < h_1$, le point M effectue des oscillations.

b) si $h_1 < h < h_2$, M quitte la gouttière et chute pour $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

c) si $h > h_2$, le point M fait des tours complets (si le guide circulaire se poursuit).

Conseil : problème unidimensionnel + question sur la vitesse ⇒ utiliser le Thm de l'$\mathcal{E}_k$ entre A et M.

Rép : 1) $v_M = \sqrt{2g(h - a(1 - \cos\theta))}$; **2)** $h_{\min} = \dfrac{5a}{2}$; **3)** $R_N(I) = 6mg$; **4)** $h_1 = a$ et $h_2 = h_{min} = \dfrac{5a}{2}$.

Ex-M3.10 Distance d'immobilisation d'une voiture sur autoroute

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de $v_0' = 130\,km.h^{-1}$. On suppose qu'il y a des frottements solides entre la voiture et la route.

On rappelle qu'alors la réaction de la route se décompose en une composante normale $\overrightarrow{R_N}$ et une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ de sens opposé à la vitesse et dont la norme vérifie $R_T = f\,R_N$ en notant f le cœfficient de frottement.

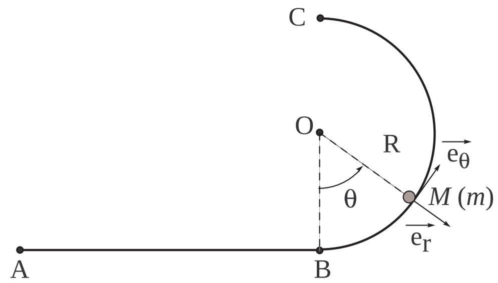
Il faut $D' = 500\,m$ pour que le véhicule s'immobilise lorsqu'on n'exerce aucune force de freignage.

1) Calculer la distance de freinage D si la vitesse initiale était de $v_0 = 110\ km.h^{-1}$

2) Le résultat est-il modifié si la route fait un angle α avec l'horizontale (la voiture montant ou descendant la pente) ?

Rép : **1)** $D = \left(\dfrac{v_0}{v_0'}\right)^2 D' = 360\ m$; **2)** Le résultat est identique que la route soit horizontale ou non ! (Faire un schéma du plan incliné, exprimer R_N et R_T en fonction de m, g, α et f avant d'appliquer le Thm de l'$\mathcal{E}_k$).

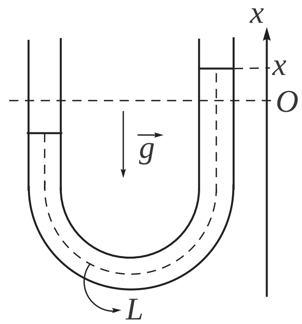
Ex-M3.11 Vitesse minimale (*)



Un solide ponctuel de masse m est lancé en A sur une piste horizontale prolongée par un demi-cercle vertical de rayon R.
On donne : $AB = 1\ m$; $R = 1\ m$; $m = 0,5\ kg$; $g = 9,81\ m.s^{-2}$.
1) Les frottements étant négligeables, calculer en A la vitesse minimale $v_{A,\min}$ que doit avoir la masse pour qu'elle atteigne le point C.
2) Même question lorsque les frottements entre l'objet et la piste sont assimilables à une force constante de norme $f = 1\ N$.

Rép : **1)** $v_A \geq v_{A,\min}$ avec $v_{A,\min} = \sqrt{5gR} \simeq 7,1\ m.s^{-1}$ (Bien entendu, c'était la vitesse de M au point I dans la question **3)** de l'exercice **Ex-M3.9**) ;
2) $v_{A,\min} = \sqrt{5gR + \dfrac{2f}{m}(AB + R\pi)} \simeq 8,2\ m.s^{-1}$.

Ex-M3.12 Oscillations dans un tube en U (**)



Dans un tube en U de section constante, on place un liquide de masse volumique μ occupant une longueur totale L.
Q : Montrer que si on écarte le liquide de sa position d'équilibre et qu'ensuite on le laisse évoluer librement, sans aucun phénomène dissipatif, le liquide effectuera des oscillations sinusoïdales de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{L}}$.

Ex-M3.13 Saut à l'élastique [P8/148]

Un homme de masse $m = 80\ kg$ saute à l'élastique d'un pont d'une hauteur $H = 112\ m$. Il est retenu par un élastique de raideur $k = 1\,000\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 80\ m$.
Il quitte le pont avec une vitesse négligeable. Les frottements sont négligés et le poids s'écrit $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_x}$ avec $g = 9,81\ m.s^{-2}$ (Attention : ici la verticale est descendante !)
Le mouvement comprend deux parties distinctes : l'une où la force de rappel élastique est absente (élastique non tendu), l'autre où elle est présente. **1)** Le système est-il conservatif ? Si oui, quelle est la valeur de son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ en prenant l'origine des énergies potentielles au point de départ ?
2) Déterminer v_1, la vitesse atteinte par la personne lorsque l'élastique commence à se tendre (quelle est alors la longueur du ressort et l'altitude x_1 correspondante ?).
3) Déterminer et calculer la longueur $l_{\text{éq}}$ de l'élastique à l'équilibre lorsque la personne est suspendue dans le vide. À ce stade, que dire de la sécurité de ce saut ?
4) Déterminer et calculer l'abscisse x_2 lorsque l'allongement de l'élastique est maximum. Conclusion ?

Rép : **3)** $l_{\text{éq}} = 80,8\ m$; **4)** $x_2 = 92\ m$

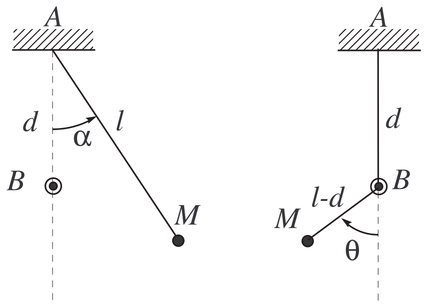
Ex-M3.14 Enroulement d'un pendule autour d'un clou [P8/150]

Un pendule est constitué d'un fil de longueur constante l attaché à un point fixe A. À son

extrémité est attaché un point matériel M de masse m. Son inclinaison par rapport à la verticale est notée α. On néglige tout frottement.
Un clou est fixé en B, sur la même verticale que A à la distance d de ce point. Lorsque le pendule entre en contact avec le clou, on suppose qu'aucun transfert énergétique ne se produit.
Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis la position $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Déterminer la condition sur d et l pour que le pendule s'enroule tout en restant tendu.

Indications : Le mouvement est circulaire mais présente deux phases :
- d'abord de centre A et de rayon l
- puis de centre B et de rayon $l - d$

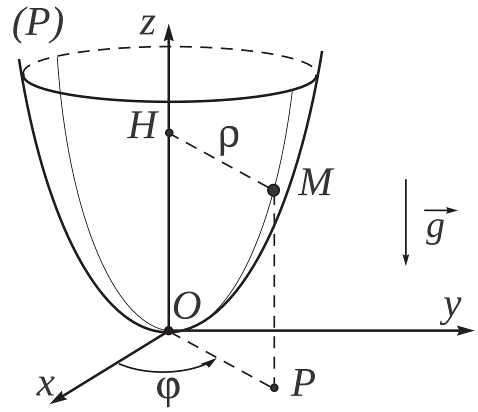
L'absence de transfert énergétique lors du contact avec le clou implique que l'énergie cinétique (et donc la vitesse) varient continûment au cours du choc.



Rép : $d > \frac{3}{5}l$

DL n°3 – Mouvement d'un particule en contact avec une cuvette parabolique (*) CCP 1999

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen lié au repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution $\mathcal{P}$, d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) est $\rho^2 - az = 0$ avec $a > 0$.
Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur $\mathcal{P}$.
Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M,



la base de projection étant celle des vecteurs de la base cylindrique locale $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$.

1) Vitesse et accélération de la particule

1.a) Exprimer la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ du point M par rapport à $\mathcal{R}$ dans la base cylindrique.
1.b) En déduire l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ sous la forme : $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = a_\rho \overrightarrow{e_\rho} + a_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + a_z \overrightarrow{e_z}$.
Justifier que a_φ s'écrit : $a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t}$
1.c) La réaction $\overrightarrow{R}$ exercée par $\mathcal{P}$ sur M est contenue dans le plan OHP défini par les vecteurs de base $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.
→ appliquer le **P.F.D.** au point M dans $\mathcal{R}$.
→ par projection de l'équation vectorielle obtenue sur la direction orthogonale au plan OHP (direction du vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$), montrer que : $\rho^2\dot{\varphi} = cte$, cette constante du mouvement étant notée C.

2) Énergie

2.a) Quelle est, en fonction des coordonnées et de leur dérivées, l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de la particule M dans $\mathcal{R}$?
2.b) Justifier l'existence d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ dont dérivent les forces extérieures agissant sur M.
Exprimer $\mathcal{E}_p$ en fonction de ρ en supposant que $\mathcal{E}_p(0) = 0$.
2.c) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M ?

3) Discussion générale du mouvement

3.a) Déduire de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\,G(\rho) + \mathcal{E}_{p,ef}(\rho) = \mathcal{E}_m$$

où $G(\rho)$ est positif et sans dimension et où $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$ est une énergie potentielle dite «effective». Expliciter $G(\rho)$ et $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$.

3.b Représenter l'allure du graphe $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$ en considérant les domaines ρ «faible» et ρ «élevé». Montrer que $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$ passe par un minimum pour une valeur ρ_m de ρ que l'on exprimera en fonction de C, m, a et g, intensité du champ de pesanteur.

3.c) Discuter, à l'aide du graphe de $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$, la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur $\mathcal{P}$ est nécessairement tracée sur une région de $\mathcal{P}$ limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

4) Étude d'un mouvment particulier

Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnées ρ de la valeur ρ_m pour laquelle $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$ est minimale.

Montrer que $\epsilon = \rho - \rho_m$ oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où $\rho_m = 1\,m$ et $a = 2\,m$. On rappelle que $g = 9,81\ m.s^{-1}$.

Rép : 2.a) $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$; **2.b)** $\mathcal{E}_p = \frac{mg}{a}\rho^2$; **3.a)** $G(\rho) = 1 + 4\frac{\rho^2}{a^2}$ et $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho) = \frac{mg}{a}\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{\rho^2}$; **3.b)** $\rho_m = \left(\frac{aC^2}{2g}\right)^{1/4}$; **4)** $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2\epsilon = 0 \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{8g}\left(1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2}\right)}$

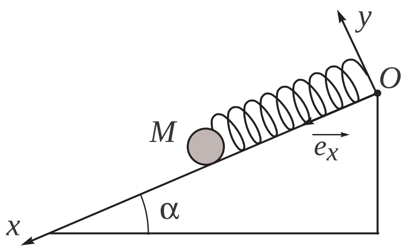
■ Oscillateur harmonique en régime libre

M4

Ex-M4.1 Ressort incliné

Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O d'un plan incliné et à un point matériel M de masse m.

Nous posons $\overline{OM} = x$ et nous supposons qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.



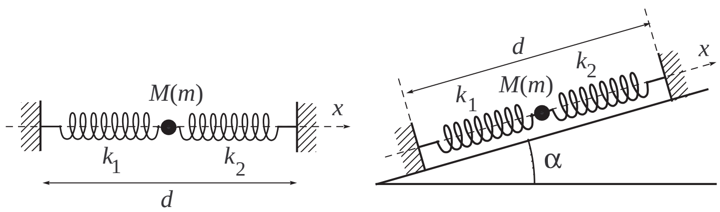
1) Déterminer x_e à l'équilibre.

2) À partir de la position d'équilibre, M est déplacé de D et relâché sans vitesse initiale. Exprimer x en fonction de t.

Rép : 1) $x_e = l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}$; **2)** $x(t) = x_e + D\cos\omega_0 t \quad$ avec $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ex-M4.2 Deux oscillateurs

Une masse m est susceptible de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Elle est soumise à l'action de 2 ressorts de même longueur à vide $l_0 = 20\ cm$ et de constantes de raideur différentes k_1 et k_2.



On donne : $m = 4\ kg$; $k_1 = 100\ N.m^{-1}$; $k_2 = 300\ N.m^{-1}$ et $d = 60\ cm$.

1) Déterminer les longueurs des 2 ressorts à l'équilibre.

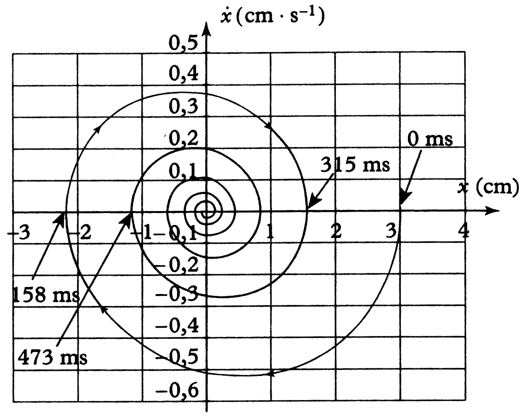
2) On écarte la masse m d'une distance a_0 à partir de sa position d'équilibre. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en prenant la position d'équilibre comme origine des abscisses. Calculer la périodes des oscillations. Donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse.

3) Les ressorts sont tendus le long d'un plan incliné de $\alpha = 30°$ avec l'horizontale → Mêmes questions.

Rép : $l_1 = \dfrac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d}{k_1 k_2} = 35\ cm$ et $l_2 = d - l_1 = 25\ cm$; **2)** $\ddot{X} + \dfrac{k_1 + k_2}{m}X = 0$ avec $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$ et $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2)a_0^2$; **3)** $l_1 = \dfrac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d - mg\sin\alpha}{k_1 k_2} = 34,95\ cm$ et $l_2 = d - l_1 = 25,05\ cm$; pour le reste, les résultats sont identiques à la situation précédente !

Ex-M4.3 Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti

On considère le portrait de phase d'un oscillateur amorti composé d'une masse $m = 500\,g$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse de la masse m et x est l'écart à la position d'équilibre). – L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.



1) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

2) Déterminer par lecture graphique :
- la valeur initiale de la position x_0 ;
- la valeur finale de la position x_f ;
- la pseudo-période T_a ;
- le décrément logarithmique.

3) En déduire le facteur de qualité Q de l'oscillateur, sa période propre ω_0, la raideur k du ressort et le cœfficient de frottement fluide λ. Applications numériques pour ces quatre grandeurs.

Rép : 2) $\delta = \ln\dfrac{x(t)}{x(t + T_a)}$: choisir la date t qui permet de déterminer à la fois $x(t)$ et $x(t+T_a)$, $\delta \simeq 0,628$; **3)** $Q = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{\delta^2} + \dfrac{1}{4}}$; k s'exprime en fonction de m et de ω_0 ; λ s'exprime en fonction de m, ω_0 et de Q.

Ex-M4.4 Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = 100\ rad.s^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = 10$; la masse $m = 100\ g$ de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de $x_0 = 10\ cm$ sans vitesse initiale.

1) Calculer : **a)** la pseudo-période ; **b)** le décrément logarithmique ; **c)** l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes ; **d)** l'énergie mécanique initiale ; **e)** l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes.

2) Déterminer le nombre de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisées par 17.

Rép : 1.a) $T \simeq 62,9\ ms$; **1.b)** $\delta \simeq 0,314$; **1.c)** $x_2 \simeq 5,34\ cm$, $x_5 \simeq 2,08\ cm$, $x_{10} \simeq 0,43\ cm$; **1.d)** $\mathcal{E}_m(t = 0) = 5\ J$; **1.e)** $\mathcal{E}_m(t = 2T) \simeq 1,42\ J$, $\mathcal{E}_m(t = 5T) \simeq 0,22\ J$, $\mathcal{E}_m(t = 10T) \simeq 0,01\ J$; **2)** $n = 9$.

Ex-M4.5 Sismographe

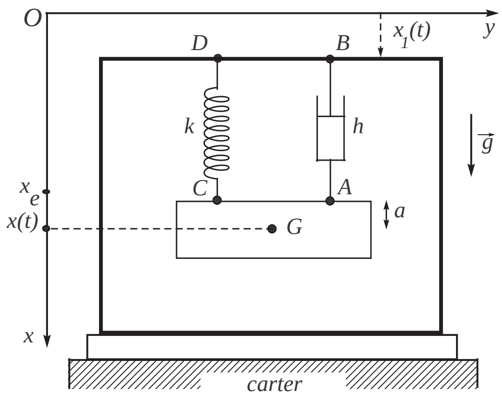
on considère un capteur d'amplitude constitué par un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle.

L'amortisseur exerce en A : $\overrightarrow{F_A} = -h\,(\overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B})$ et le ressort exerce en C : $\overrightarrow{T_C} = -k\,(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_0C_0})$.

Le support, le ressort et l'amortisseur sont de masse négligeable.

Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide l_0 (notée D_0C_0).

On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine animée d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b\sin\omega t$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ ((Oxy) étant lié à $\mathcal{R}_0$).

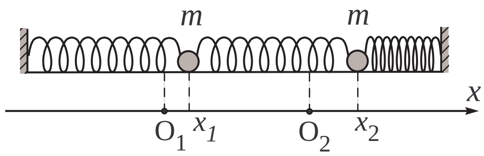


1) Déterminer l'équation que vérifie x_e (position de la masse à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ lorsque $x_1 = 0$).
2) Écrire l'équation différentielle du mouvement de m dans $\mathcal{R}_0$.
Si on pose $X = x - x_1 - x_e$, montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\sin\omega t.$$

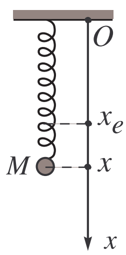
Résoudre cette équation. (Rque : ceci est le principe du sismographe.)

Ex-M4.6 **Système de deux oscillateurs couplés (*)**



On considère le système suivant où les rois ressorts sont identiques et de constante de raideurs k. Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1 et x_2 à partir des positions d'équilibre O_1 et O_2, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus (ils sont alors àu repos').
On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m} et x_{2m} sans vitesse initiale.
1) Écrire les équations différentielles du mouvement des deux masses.
2) En posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, chercher à quelle condition portant sur ω il est possible d'avoir des solutions de la forme : $x_1 = a_1\cos(\omega t + \varphi)$ et $x_2 = a_2\cos(\omega t + \varphi)$?
3) En déduire les deux pulsations propres possibles pour le système et écrire la solution générale du mouvement des deux masses.
4) Quelles sont les solutions $x_1(t)$et $x_2(t)$ du problème ? En déduire les conditions sur x_{1m} et x_{2m} pour que les mouvements des deux masses soient harmoniques et décrire ces mouvements.
Rép : 1) $m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = kx_2$ et $m\ddot{x}_2 + 2kx_2 = kx_1$; **2)** $(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega_0^4$; **3)** $\omega = \omega_0$ ou $\omega = \sqrt{3}\omega_0$; **4)** $x_1(t) = \dfrac{x_{1m} + x_{2m}}{2}\cos(\omega_0 t) + \dfrac{x_{1m} - x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$ et $x_2(t) = \dfrac{x_{1m} + x_{2m}}{2}\cos(\omega_0 t) - \dfrac{x_{1m} - x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$ – Pour que les mouvements soient harmoniques, soit $x_{1m} = x_{2m}$, soit $x_{1m} = -x_{2m}$.

Ex-M4.7 **Ressort vertical soumis à des forces de frottements fluide (*)**



Une sphère de rayon r faible, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ et plongée dans un liquide de cœfficient de viscosité η est soumise à une force de frottement qui a pour expression : $\overrightarrow{f} = -6\pi.\eta.r.\overrightarrow{v}$ (loi de Stockes).
Unje telle sphère de masse volumique ρ est suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.
La période des oscillations libres dans l'air est T_0 (on néglige le frottement et la poussée d'Archimède **dans l'air**). Si l'on plonge cette sphère dans un liquide de masse volumique $\rho_e < \rho$, la pseudo-période des oscillations est T (dans ce cas, on ne néglige ni le frottement ni la poussée d'Archimède **dûs au liquide** sur la sphère).
1) Retrouver l'expression de la période T_0 en fonction des grandeurs k, ρ et r.
2) Lorsque la sphère est plongée dans le liquide, déterminer la longueur x_e du ressort à l'équilibre.
3) On écarte la sphère de sa position à l'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Soit x la longueur du ressort à la date t. Donner l'équation différentielle vérifiée par x, puis la simplifier en posant $X = x - x_e$.
4) À quelle condition sur k le régime est-il pseudo-sinusoïdal ? En déduire alors la pseudo-période T_1.
5) Montrer comment, à partir de la mesure de T_0 et de T_1, et sans connaître k, on peut en déduire le cœfficient de viscosité η du liquide. Donner la dimension de η.

Rép : 1) $T_0 = 4\pi\sqrt{\dfrac{\pi r^3\rho}{3k}}$; **2)** $x_e = l_0 + \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi r^3 g}{k}(\rho - \rho_e)$; **3)** $\ddot{X} + \dfrac{9\eta}{2r^2\rho}\dot{X} + \dfrac{3k}{4\pi r^3\rho}X = 0$;
4) $T_1 = \dfrac{4\pi}{\sqrt{\dfrac{3k}{\pi r^3\rho} - \dfrac{81\eta^2}{4r^4\rho^2}}}$; **5)** $\eta = \dfrac{8\pi r^2\rho}{9}\sqrt{\dfrac{1}{T_0^2} - \dfrac{1}{T_1^2}}$

Ex-M4.8 **Oscillateur harmonique spatial isotrope**

Il s'agit d'une particule M, de masse m, élastiquement liée à un point fixe O (origine d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$) par une force $\overrightarrow{F}$ du type $\overrightarrow{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$, k étant la constante de raideur.
Le mouvement de M a lieu dans le plan (Oxy), avec les conditions initiales suivantes :

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0\,\overrightarrow{e_x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$$

1) On néglige tout frottement de type fluide et on pose $\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
→ Quelles sont les équations paramétriques de la trajectoire du point M ?
→ En déduire l'équation cartésienne de cette trajectoire et représenter l'allure de cette trajectoire en précisant le sens de parcours.
2) On ne néglige plus le frottement fluide exercé sur le point M au cours du mouvement. À présent, le point M est soumis à l'action des forces $\overrightarrow{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{f} = -\alpha\,\overrightarrow{v}$, α étant le cœfficient de frottement.
On suppose toujours que $\overrightarrow{OM_0} = x_0\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$. Le point M se déplace dans le plan (Oxy).
→ Déterminer la loi de variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le cas où $\alpha = 2m\omega_0$.
→ Représenter l'allure de cette trajectoire en précisant le sens de parcours.

Solution Ex-M3.13

L'énoncé suggère via l'expression du poids de paramétrer le mouvement suivant un axe Os selon la verticale descendante. Attention donc au signe de l'énergie potentielle de pesanteur !
1) Considérons l'homme de masse m supposé ponctuel dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ terrestre supposé galiléen. Son énergie mécanique est conservée au cours du mouvement puisque les forces qui s'exercent sont conservatives (le poids dans la première phase ou le poids et la force de rappel dans la seconde phase). Dans la première phase du mouvement :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgx_0 = 0}$$

en prenant l'origine des énergies potentielles au point de départ ($\dot{x}_0 = v_0 = 0$ à et $x_0 = 0$ à l'instant initial).
2) Lorsqu'il commence à se tendre, le ressort a pour longueur l_0 donc $x = l_0$. Donc à l'instant t_l, la vitesse vaut donc $\boxed{v_1 = \dot{x}(t_1) = \sqrt{2gl_0} = 39,6\ m.s^{-1}}$
3) Le bilan des forces est modifiée puisque l'élastique est tendu il faut ajouter la tension de l'élastique $\overrightarrow{F_r} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$. L'équilibre des forces projeté sur l'axe Ox donne :

$$(m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{0}) \cdot \overrightarrow{e_x} \quad \Leftrightarrow \quad mg - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k} = 80,8\ m}$$

L'élastique est effectivement allongé à l'équilibre, ce qui est cohérent avec $l_{\text{éq}} > l_0$.
Numériquement, nous constatons que $l_{\text{éq}} < H$. Le saut paraît sans risque à ce stade de l'exercice.
4) Procédons comme aux questions 1-2, puisque le système est toujours conservatif. Son énergie mécanique est constante (nulle) et vaut à un instant quelconque ultérieur à t_1 :
$\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \dfrac{1}{2}k(l - l_0)^2 = 0$
L'élongation maximale de l'élastique, à l'instant t_2, est obtenue lorsque la vitesse de chute s'annule (le mouvement change de sens). Exprimons l'énergie mécanique à cet instant :

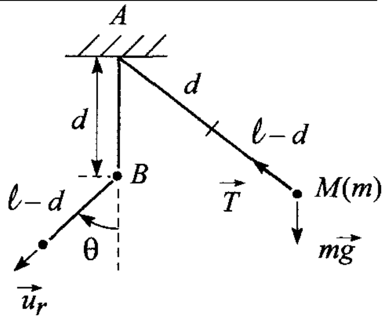
$$\mathcal{E}_m(t_2) = 0 = 0 - mgx(t_2) + \frac{1}{2}k(x(t_2) - l_0)^2$$

Cela conduit à un polynôme en $x(t_2)$ dont il ne faut retenir que la racine positive :

$$\boxed{x(t_2) = l_{\text{éq}} + \sqrt{l_{\text{éq}}^2 - l_0^2} = 92\ m}$$

Numériquement, $x(t_2) < H$: le saut est donc sans risque mais le frisson est garanti !

Solution Ex-M3.14



Le point M est soumis à la tension du fil et à son poids. Seul le poids travaille. Le fil reste tendu si la tension du fil ne s'annule pas.

Une fois le fil en contact avec le clou, le pendule décrit un cercle de centre B et de rayon $l - d$. La tension du fil s'exprime par $\vec{T} = -T\vec{u_r}$. La projection du PFD sur $\vec{u_r}$, s'écrit :

$$-\frac{mv^2}{l-d} = mg\cos(\theta) - T \quad \Rightarrow \quad T = mg\cos(\theta) + \frac{mv^2}{l-d}$$

Le fil reste tendu si $T > 0$ sur tout le mouvement. C'est pour $\cos(\theta) > 0$ que cette condition est la plus restrictive, donc pour $\theta = \pi$ (position verticale haute). La condition devient donc : $T = -mg + \dfrac{mv^2}{l-d} > 0$

Utilisons le théorème de l'énergie cinétique entre la position initiale et la position verticale haute. Prenons l'altitude de la position initiale nulle. La position basse a pour altitude $-l$ et le diamètre de la trajectoire est $2(l-d)$ donc l'altitude de la position haute est : $-l + 2(l-d) = l - 2d$

D'où le théorème : $\dfrac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg(l - 2d - 0) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g(2d - l)$

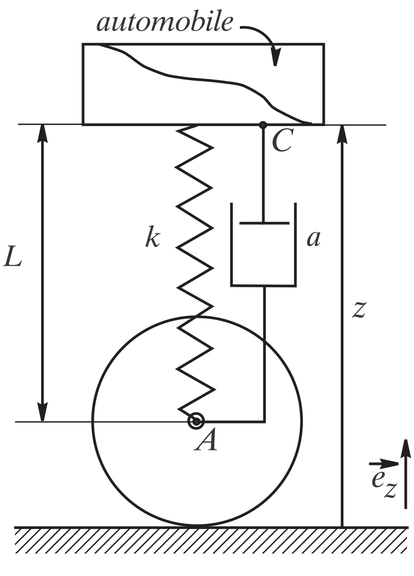
En combinant ces deux résultats, la condition devient :

$$T = \left(-1 + \frac{2(2d-l)}{l-d}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d > \frac{3}{5}l}$$

DL nº6 – Comportement Routier d'une Automobile (*)

Concours EIA 1999 [ATS et TSI]

Modèle simplifié de la suspension



La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- d'un ressort métallique hélicoïdal de *constante de raideur* k et de longueur *à vide* L_0 ;
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de *cœfficient d'amortissement* a.

On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Donc une suspension n'agit que sur le quart de la masse totale du châssis.

Les pneus, de rayon extérieur R, sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude.

Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut ($\vec{e_z}$ est le vecteur unitaire vertical).

1) Le véhicule étant immobile, sans freins, sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e des ressorts *au repos* et la garde au sol z_0 du véhicule correspondante ?

2) Lors d'un ***essai dynamique à vide***, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

2.a) Établir l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta \qquad (E)$$

α, β et δ étant des constantes que l'on exprimera en fonction de a, k, M et z_0.

2.b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible.*

Quelle doit être alors la valeur de α en fonction de β ?

En déduire celle de a en fonction de M et k.

2.c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0, h et $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

2.d) Tracer avec soin le graphe $z(t)$. (On prendra pour échelle $z_0 = 1$; $h = \dfrac{z_0}{4}$; $\omega_0 = 1$).

3) On effectue de nouveau le même essai (c'est-à-dire avec les mêmes conditions initiales), mais cette fois on fait un ***essai en charge nominale*** : le véhicule contient quatre masses identiques m également réparties sur les quatre systèmes {ressort-amortisseur}.

À cause de cette masse m au niveau de chaque suspension, la garde au sol n'est plus z_0 mais z_0'. De même la longueur correspondante du ressort n'est plus L_e mais L_e'.

3.a) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$, et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha'\,\dot{z} + \beta'\,z = \delta' \qquad (E')$$

en exprimant les nouvelles constantes α', β' et δ' en fonction de a, k, M, m et z_0'.

3.b) Montrer que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

3.c) Déterminer l'expression de la (pseudo-)période T des oscillations autour de la position d'équilibre final en fonction de k, M et m.

3.d) On souhaite obtenir $T = \dfrac{\pi}{3}\ s$ pour $M = 1\,000\ kg$ et $m = 100\ kg$. En déduire la valeur de k puis de a.

Indications et réponses partielles : (résultats utilisables pour répondre aux questions suivantes)

1) $L_e = L_0 - \dfrac{Mg}{4k}$.

2.a) $\dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\beta}{k} = \dfrac{\delta}{k\,z_0} = \dfrac{4}{M}$. – **2.b)** $a = \sqrt{kM}$. – **2.c)** $z(t) = z_0 - h(1+\omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$.

3.a) $\dfrac{\alpha'}{a} = \dfrac{\beta'}{k} = \dfrac{\delta'}{k\,z_0'} = \dfrac{4}{M+4m}$. – **3.c)** $T = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{M+4m}{\sqrt{km}}$. – **3.d)** $k = 44\,100\ N.m^{-1}$.

Solution DL n°6 – Comportement routier d'une Automobile

1) À l'équilibre, la tension du ressort d'une des quatre suspensions compense le quart du poids du châssis (le châssis n'est soumis a aucun frottement visqueux puisque la vitesse relative d'un amortisseur est nulle à l'équilibre) :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{T} + \frac{\overrightarrow{P}}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{selon}\overrightarrow{e_z} : \quad 0 = -k(L_e - L_0) - \frac{Mg}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Soit : $\boxed{L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}}$ et $\boxed{z_0 = L_e + R = L_0 - \frac{Mg}{4k} + R}$.

2.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au quart du châssis associé à une suspension :

$$\frac{M}{4}\,\overrightarrow{a_{\text{chassis}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{T} + \frac{\overrightarrow{P}}{4} + \overrightarrow{F}_{\text{frot}}$$

avec $\overrightarrow{a_{chassis/\mathcal{R}}} = \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$ (mouvement vertical), $\overrightarrow{T} = -k(L - L_0)\,\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot{z}_C - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,\dot{z}_C\overrightarrow{e_z} = -a\,\dot{z}\overrightarrow{e_z}$. Soit, en projection selon $\overrightarrow{e_z}$:

$$\frac{M}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{Mg}{4} - a\,\dot{z} \quad \textbf{(2)}$$

Soit, en faisant **(2)** – **(1)** : $\frac{M}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_e) - a\,\dot{z} = -k(z - z_0) - a\,\dot{z}$; d'où :

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta \quad (E) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{4a}{M} \quad \beta = \frac{4k}{M} \quad \delta = \frac{4k}{M}\,z_0}$$

2.b) Pour que le retour à la position d'équilibre soit le plus rapide possible, il faut qu'il corresponde à un **régime libre critique**.
Le régime critique est obtenu lorsque le discriminant de l'équation caractéristique associé à l'équation différentielle (E) est nul :

$$\delta = \alpha^2 - 4\beta = 0 \iff \boxed{\alpha = 2\sqrt{\beta}} \iff \frac{16\,a^2}{M^2} = 4\,\frac{4k}{M} \iff \boxed{a = \sqrt{k\,M}}$$

2.c) La solution $z(t)$ de (E) se décompose en une solution particulière de l'équation avec second membre (z_P) et de la solution générale de l'équation homogène $(z_G(t))$.

• $\boxed{z_P = z_0}$.

• L'équation caractéristique de (E) $(r^2 + \alpha\,r + \beta = 0)$ admet, pour le régime critique, une racine double :

$$r = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{2a}{M} = -2\sqrt{\frac{k}{M}} \equiv -\omega_0$$

Alors, $\boxed{z_G(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}}$.

• Ainsi : $z(t) = z_G(t) + z_P = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t} + z_0$.
Les constante d'intégration se déduisent des conditions initiales :
◦ $z(t = 0) = z_0 - h = A + z_0 \;\Rightarrow\; \underline{A = -h}$;
◦ $\dot{z}(t = 0) = 0 = -A\omega_0 + B \;\Rightarrow\; \underline{B = A\omega_0 = -h\omega_0}$.

$$\boxed{z(t) = z_0 - h\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}}$$

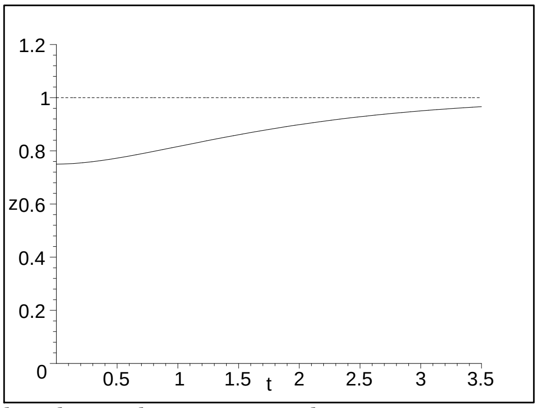
2.d) $z(t) = z_0 - h\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t} \;\Rightarrow\; \dot{z}(t) = h\omega_0^2\,t\,e^{-\omega_0 t} > 0 \;\Rightarrow\; \ddot{z}(t) = h\omega_0\,(1 - \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}$.

Ainsi, $z(t)$ est une fonction croissante dont la courbe admet :

○ une tangente horizontale en $t = 0$ (car $\dot{z}(0) = 0$),

○ un point d'inflexion M_1 pour $\ddot{z}(t_1) = 0$, soit $M_1\left(t_1 = \dfrac{1}{\omega_0}\,,\, z_1 = z_0 - \dfrac{2h}{e}\right)$,

○ une asymptote horizontale d'équation $z = z_0$ (retour à l'équilibre).



3.a) La nouvelle équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} \quad \textbf{(1')}$$

(en introduisant la nouvelle longueur à l'équilibre L'_e du ressort correspondant à la nouvelle garde au sol z'_0 du châssis chargé par $4m$).
Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} - a\,\dot{z} \quad \textbf{(2')}$$

Soit, en faisant **(2')** – **(1')**, avec $L - L'_e = z - z'_0$:

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha'\,\dot{z} + \beta'\,z = \delta' \quad (E') \qquad \text{avec} \qquad \alpha' = \frac{4a}{M+4m} \qquad \beta' = \frac{4k}{M+4m} \qquad \delta' = \frac{4k}{M+4m}\,z'_0}$$

3.b) Le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E') est (en se souvenant que $a = \sqrt{kM}\,!$) :

$$\Delta' = \alpha'^2 - 4\beta' = \left(\frac{4a}{M+4m}\right)^2 - 4\,\frac{4k}{M+4m} = \frac{16a^2 - 16k\,(M+4m)}{(M+4m)^2} = -\frac{64\,km}{(M+4m)^2} < 0$$

Ceci correspond à des racines complexes de l'équation caractéristiques, donc à une **solution pseudo-périodique** de (E'), c'est-à-dire à une oscillation sinusoïdale amortie exponentiellement.

3.c) Pour déterminer la pseudo-période, il faut déterminer la pseudo-pulsation qui est la partie imaginaire commune aux deux racines $r_{1/2}$ de l'équation caractéristique :

$$r_{1/2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\,\frac{\sqrt{|\Delta'|}}{2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\omega$$

Soit : $\omega \equiv \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{4\sqrt{km}}{M+4m}$. Donc :

$$\boxed{T = \frac{\pi}{2}\,\frac{M+4m}{\sqrt{km}}}$$

3.d) On veut $T = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{M+4m}{\sqrt{km}} = \dfrac{\pi}{3}\ s$, soit :

$$\boxed{k = \frac{9}{4}\,\frac{(M+4m)^2}{m} = 44\,100\ N.m^{-1}} \qquad \text{et donc :} \qquad \boxed{a = \sqrt{kM} = 6\,600\ kg.s^{-1}}$$