M1 – CINÉMATIQUE DU POINT

« Nous avons (...) le résultat suivant : Toute description d'événements dans l'espace nécessite l'emploi d'un corps rigide auquel les événements doivent être rapportés. (...) Je définis la tâche de la Mécanique dans les termes suivants : "La Mécanique doit écrire comment les corps changent de lieu avec le temps" [mais] il n'est pas clair ce qu'il faut ici entendre par "lieu" et "espace". (...) À [leur] place nous mettons "mouvement par rapport à un corps de référence pratiquement rigide" [ou] "système de coordonnées", qui est utile pour la description mathématique (...). »

Albert EINSTEIN (1879-1955) [Nobel de physique 1921] – - *La Relativité* (Payot, 2001, p. 18-20)

OBJECTIFS

La Mécanique peut être divisée en plusieurs branches :
- la **cinématique** (du grec κινημα « kinéma » signifiant *mouvement*) qui vise à décrire les mouvements sans en chercher les causes ;
- la **dynamique** (du grec δυναμις « dynamis » signifiant *force*) qui cherche à établir un lien entre les mouvements et les causes qui les engendrent.

D'autres branches de la mécanique peuvent aussi être envisagées :
- la **cinétique** ou l'étude descriptive d'un système matériel en mouvement : cette partie doit souvent être antérieure à tout autre aspect de la mécanique. Il s'agit de définir les quantités qui vont permettre de décrire le mouvement comme la quantité de mouvement ou le moment cinétique par exemple.
- la **statique** ou l'étude des équilibres des systèmes : cette partie est implicitement incluse dans l'analyse de la dynamique en considérant que vitesse et accélération ou tout autre quantité dynamique sont nulles.

Objectifs de cette leçon :
- Repérage d'un événement dans l'espace et dans le temps
- Systèmes usuels de coordonnées
- Dérivée d'une grandeur vectorielle
- Notion de référentiel
- Expressions des vecteurs vitesse et accélération d'un point
- Mouvement rectiligne et Mouvement circulaire.

I Repérage d'un point et systèmes et coordonnées

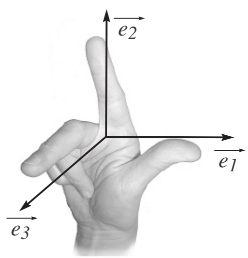
I.1 Base OrthoNormée Directe (B.O.N.D.)

◊ **Définition :** Une base orthonormée directe est constituée de trois vecteurs :
- orthogonaux
- unitaires
- qui vérifient la « règle de la main droite » :

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

expression invariante par permutation circulaire :

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$



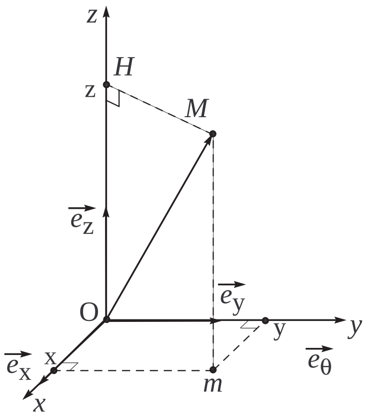
Compléments et rappels mathématiques : Cf Cours.

I.2 Base cartésienne ➜ Cf Cours

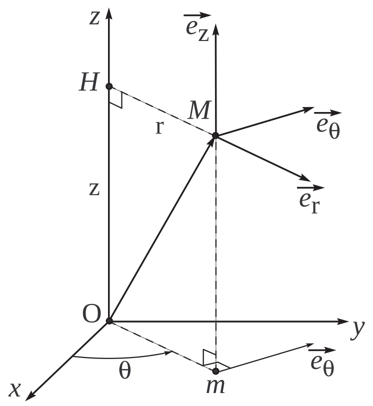
I.3 Base cylindrique ➜ Cf Cours

I.4 Base sphérique ➜ Cf Cours 2^{de} période

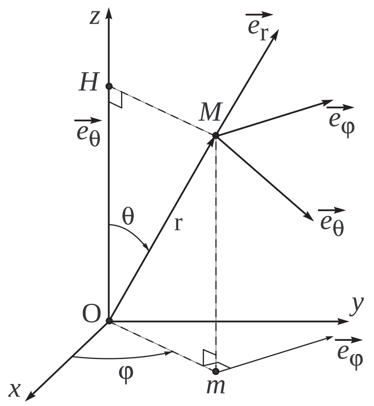
I.5 Compléments



Base cartésienne et vecteur position

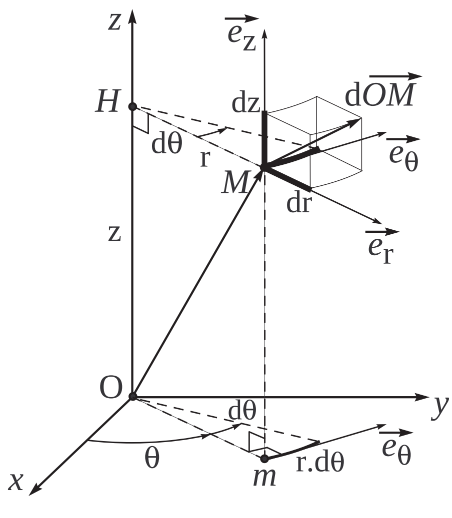


Base cylindrique et vecteur position

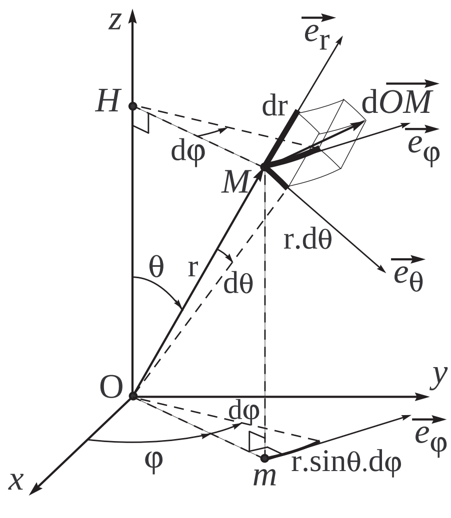


Base sphérique et vecteur position

	Base cartésienne	Base cylindrique	Base sphérique
Vecteur position $\overrightarrow{OM}$	$x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$	$r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$	$r\overrightarrow{e_r}$
Vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$	$\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$	$\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$	$\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$
Volume élémentaire $\mathrm{d}V$	$\mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z$	$r^2\mathrm{d}r.\sin\theta\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}\varphi$
Composantes d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque	$u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$	$u_r\overrightarrow{e_r} + u_\theta\overrightarrow{e_\theta} + u_z\overrightarrow{e_z}$	$u_r\overrightarrow{e_r} + u_\theta\overrightarrow{e_\theta} + u_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$
Norme $u = \parallel \overrightarrow{u} \parallel$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque	$\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$	$\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2}$	$\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2}$



Base cylindrique et vecteur déplacement élémentaire



Base sphérique et vecteur déplacement élémentaire

Rq : Sur les deux schémas précédents, on voit qu'à un déplacement élémentaire selon les trois directions de la base considéré peut être associé à un volume élémentaire $\mathrm{d}V$, assimilable à un parallélépipède rectangle, tel que :

- pour la base cylindrique : $\mathrm{d}V = (\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = r\mathrm{d}r.\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}z$
- pour la baser sphérique : $\mathrm{d}V = (\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi) = r^2\mathrm{d}r.\sin\theta\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}\varphi$
- bien entendu, pour la base cartésienne : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\mathrm{d}z$

Cette remarque nous sera très utile dans la suite du cours (➜ Cf Cours d'**Élecromagnétisme**)

II Vitesse et accélération dans un référentiel $\mathcal{R}$

II.1 Définitions

♢ **Définition :** Soit un référentiel $\mathcal{R}$ et M un point matériel qui décrit une trajectoire $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ entre t_1 et t_2.

• On appelle **vitesse moyenne** : $v_{\text{moy}} = \dfrac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$

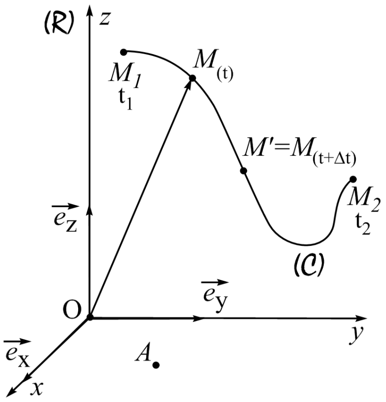
• La **vitesse instantanée** de M à l'instant t est :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{M_{(t)}M_{(t+\Delta t)}}}{\Delta t}$$

• On définit le **vecteur vitesse** instantanée

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_{(t)}M_{(t+\Delta t)}}}{\Delta t}$$

- la norme est $v(t)$,
- la direction celle de la tangente à la trajectoire
- et le sens celui du mouvement



• Comme $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{M_{(t)}M_{(t+\Delta t)}} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, avec O un point origine (donc un point fixe) de $\mathcal{R}$, on écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}$$

Rq : Comme la définition précédente est valable non seulement pour M repéré par rapport à l'origine de $\mathcal{R}$ mais pour M observé depuis tout point fixe A de $\mathcal{R}$, on a :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

♢ **Définition :** L'**accélération** de M à l'instant t dans la référentiel $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}}}$$

Important : Lorsqu'on dérive un vecteur par rapport au temps, il faut toujours préciser le référentiel dans lequel on se place.
En effet, la trajectoire dépendant du référentiel, on comprend que les vecteurs associés (position, vitesse) en dépendent également.

Un vecteur comme la vitesse ou l'accélération dépend du référentiel d'étude. Soit. Mais un vecteur donné, peut être projeté d'autant de manières qu'il existe de bases de projection. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons exprimer les vecteurs vitesse et accélération instantanées dans les deux bases fondamentales que nous utiliserons en cours.

II.2 Expressions en coordonnées cartésiennes

• Comme $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ et que la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est une base constante dans le référentiel $\mathcal{R}$ (3 directions orthogonales fixes de $\mathcal{R}$), on a :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + x\cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_x}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + y\cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_y}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} + z\cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}$$

D'où l'expression de la vitesse et, par suite, celle de l'accélération dans la base cartésienne :

❙ Notation ligne :

$$\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

❙ Notation colonne :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \underset{(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})}{\left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right.} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \underset{(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})}{\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right.}$$

Rq : f étant une fonction du temps, on note $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot{f}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{f}$.

II.3 Expressions en coordonnées cylindrique

• Pour obtenir les composantes de la vitesse en base cylindrique, il faut partir du vecteur position exprimé selon cette base cylindrique : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$.
D'où :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} + z\cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}$$

• Puisque : $\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta}\right) = \overrightarrow{e_\theta}\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\overrightarrow{e_r}\end{cases}$ (cf. **I.3.e)**) , on a : $\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta}.\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta}.\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}\end{cases}$

Et on déduit : $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$.
• On peut alors exprimer l'accélération :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}r}\right)_{\mathcal{R}}}_{\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{-\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} + \dot{z}\cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t}\right)}$$

D'où les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base cylindrique :

❙ Notation ligne :

$$\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

❙ Notation colonne :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}{\left|\begin{array}{l}\dot{r}\\ r\dot{\theta}\\ \dot{z}\end{array}\right.} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}{\left|\begin{array}{l}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\\ \ddot{z}\end{array}\right.}$$

Rq1 : Remarquons qu'on peut exprimer la composante orthoradiale de l'accélération d'une autre manière qui sera utile par la suite (➜ Cf Cours 2$^{\text{de}}$ période) :

$$\boxed{a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}}$$

Rq2 :

$$\overrightarrow{u} = \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}{\left|\begin{array}{lll}u_r & \leftarrow & \text{composante radiale}\\ u_\theta & \leftarrow & \text{composante orthoradiale}\\ u_z & \leftarrow & \text{composante longitudinale}\end{array}\right.}$$