M8 – CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

OBJECTIFS

• Par définition, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$, O étant un point fixe du référentiel $\mathcal{R}$, dépend du référentiel dans lequel on l'évalue. De même pour l'accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$.
Dans ce chapitre, on se limite aux aspects cinématiques et on cherche à établir le liens entre les vitesses et les accélérations exprimées dans deux référentiels différents.
Nouveautés de cette leçon :
• Loi de composition des vitesses.
• Loi de composition des accélérations.
• Notion de point coïncidant pour savoir retrouver la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v_e}(M)$ et l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{a_e}(M)$
• Expression générale de l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_C}(M)$.

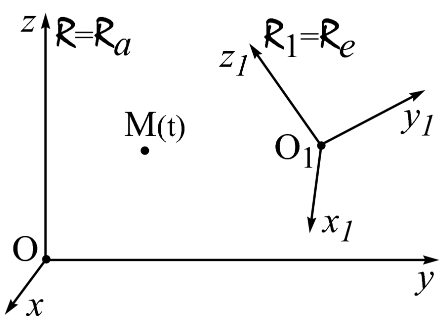
I Mouvement relatif de deux référentiels

I.1 Position du problème

Q : Si on connaît $\left\{\begin{array}{l}\text{la trajectoire de } M \text{ dans } \mathcal{R}_a\\ \text{la vitesse } \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}}(t)\\ \text{l'accélération } \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_a}}(t)\end{array}\right.$, quelle sont $\left\{\begin{array}{l}\text{la traj. de } M \text{ dans } \mathcal{R}_e\\ \text{la vitesse } \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}(t)\\ \text{l'accélération } \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_e}}(t)\end{array}\right.$?

Pour répondre à cette question, il faut connaître le mouvement de $\mathcal{R}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_a$:

> ◇ **Définition :** Le mouvement de $\mathcal{R}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_a$ s'appelle le **mouvement d'entraînement**.
> $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}$ s'appelle le **référentiel fixe** ou **référentiel absolu**.
> $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_1$ s'appelle le **référentiel mobile** ou **référentiel relatif**.



Notation : $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\overrightarrow{e_{x_1}}, \overrightarrow{e_{y_1}}, \overrightarrow{e_{z_1}})$ notent les **B**ases **O**rtho**N**ormées **D**irectes cartésiennes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ respectivement.

I.2 Rotation relative des deux trièdres des B.O.N.D. de $\mathcal{R}_a$ et $\mathcal{R}_e$

> ◇ **Définition :** Il existe un vecteur qu'on appelle **vecteur rotation d'entraînement** de $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_1$ p/r à $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}$ tel que :
>
> $$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_{x_1}} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_{y_1}} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_{z_1}}$$

I.3 Translation et rotation

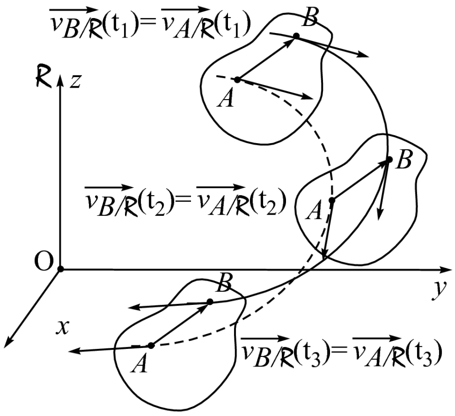
Le mouvement d'entraînement de $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_1$ par rapport $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}$ est la superposition :
- d'une **rotation** à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}$
- et d'une **translation** qu'on peut caractériser par $\overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO_1}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$

Avec O un point fixe dans $\mathcal{R}$ et O_1 un point fixe dans $\mathcal{R}_1$.

I.4 Mouvement d'entraînement par translation

a Translation d'un solide dans $\mathcal{R}$:

◇ **Définition :** Un solide est en **mouvement de translation** par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si, pour deux points A et B quelconques de ce solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ garde toujours les mêmes direction, sens et norme au cours du temps : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{Cte}}}$.



▮Propriétés : Les trajectoires de tous les points d'un solide en translation sont superposables.

Si ces trajectoires sont :
- des courbes de forme quelconque : on parle de translation **curviligne**
- des droites parallèles : on parle de translation **rectiligne**
- des cercles de même rayon : on parle de translation **circulaire**.

▮Propriété : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Cste} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}(t) - \overrightarrow{OA}(t) = \overrightarrow{\text{Cte}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v_{B/\mathcal{R}}}(t) = \overrightarrow{v_{A/\mathcal{R}}}(t)$

CI : au cours d'une translation, tous les points d'un solide ont, à chaque instant t, le même vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$.

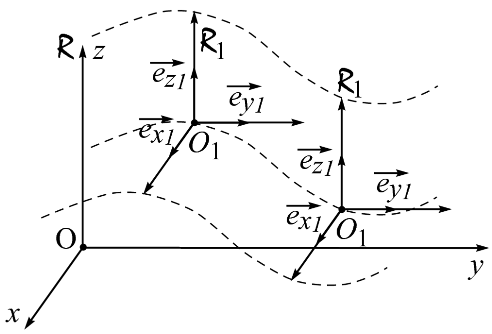
Rq : Bien entendu, ce vecteur vitesse peut varier *au cours du temps*, en norme comme en direction !

b $\mathcal{R}_1$ est un solide géométrique qui peut être en translation p/r à $\mathcal{R}$:

Dans ce cas, tout vecteur lié à $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_1$ demeure constant dans $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_1$; entre autre : $\overrightarrow{e_{x_1}}$, $\overrightarrow{e_{y_1}}$ et $\overrightarrow{e_{z_1}}$.

Donc :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\overrightarrow{e_{x_1}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_{x_1}} = \overrightarrow{0} \\ \left(\dfrac{d\overrightarrow{e_{y_1}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_{y_1}} = \overrightarrow{0} \\ \left(\dfrac{d\overrightarrow{e_{z_1}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_{z_1}} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}}$$

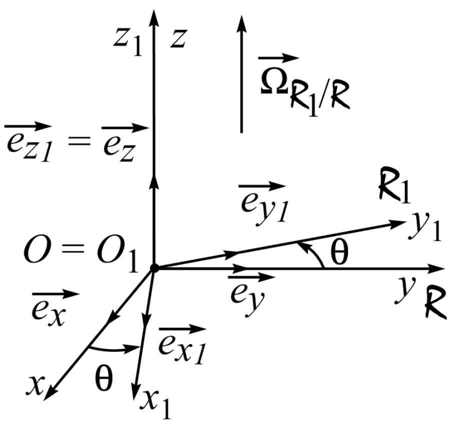


▮CI : Lorsqu'un référentiel $\mathcal{R}_1$ a un mouvement d'entraînement de translation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, alors, son vecteur rotation d'entraînement en nul.

I.5 Mouvement d'entraînement par rotation de $\mathcal{R}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_a$

Hyp : Supposons que, $\forall\, t$:
- $(Oz) = (O_1z_1)$ et $O = O_1$.
- le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en rotation dans le référentiel $\mathcal{R}$ autour de la verticale.

Alors : $\begin{cases} \overrightarrow{e_{x_1}} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_{y_1}} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_{z_1}} = \overrightarrow{e_z} \end{cases}$



Soit, en dérivant par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}(-\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}) = \dot{\theta}\overrightarrow{e_{y_1}} \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}(-\cos\theta\overrightarrow{e_x} - \sin\theta\overrightarrow{e_y}) = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_{x_1}} \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que :

$$\begin{cases} \dot{\theta}\overrightarrow{e_{z_1}} \times \overrightarrow{e_{x_1}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_{y_1}} \equiv \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \\ \dot{\theta}\overrightarrow{e_{z_1}} \times \overrightarrow{e_{y_1}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_{x_1}} \equiv \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \\ \dot{\theta}\overrightarrow{e_{z_1}} \times \overrightarrow{e_{z_1}} = \overrightarrow{0} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \end{cases}$$

Donc, en posant $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$, pour $i = x$, y ou z :

$$\boxed{\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{i_1}}}{\mathrm{d}t}\right) = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{e_{i_1}}}$$

Alors (cf. **I.2**) $\overrightarrow{\Omega}$ représente le **vecteur rotation** de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}}$$

△ **Rq : (Important à comprendre !)**

La base $(\overrightarrow{e_{x_1}}, \overrightarrow{e_{y_1}}, \overrightarrow{e_{z_1}})$ est une **base cartésienne** dans le référentiel $\mathcal{R}_1$

Mais ces trois même vecteurs sont les vecteurs d'une **base polaire** dans le référentiel $\mathcal{R}$.

CI : La nature d'une base (cartésienne ou polaire) dépend du référentiel dans lequel on travaille.

II Dérivation d'un vecteur par rapport au temps

II.1 Formule de Varignon

• Soit un vecteur quelconque $\overrightarrow{U}$. On peut le projeter dans la B.O.N.D. de $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_e$:

$$\boxed{\overrightarrow{U} = U_{x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + U_{z_1}\overrightarrow{e_{z_1}} + U_{z_1}\overrightarrow{e_{z_1}}}$$

• On peut dériver ce vecteur **par rapport au temps dans le référentiel** $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}$: l'observateur, pour cette opération, est LIÉ à $\mathcal{R}$:

$$\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\dot{U}_{x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dot{U}_{y_1}\overrightarrow{e_{y_1}} + \dot{U}_{z_1}\overrightarrow{e_{z_1}}} + U_{x_1}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + U_{y_1}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + U_{z_1}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z_1}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times (U_{x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + U_{z_1}\overrightarrow{e_{z_1}} + U_{z_1}\overrightarrow{e_{z_1}}) \Leftrightarrow \boxed{\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{U}}$$

II.2 Composition des vecteurs rotation

a Relation entre $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}$

$$\left.\begin{aligned} \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{U} \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} &= \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} \times \overrightarrow{U} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \underbrace{(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}})}_{\overrightarrow{0}} \times \overrightarrow{U}$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = -\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$

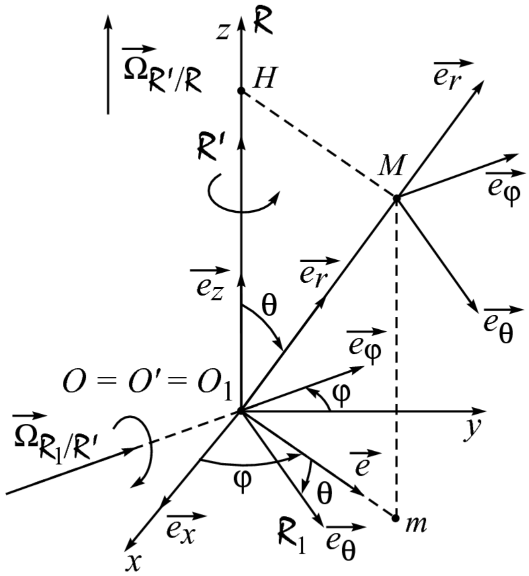
b Composition des vecteurs rotations :

Supposons trois référentiels $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$. On a :

$$\left.\begin{aligned} \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_2} &= \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} \times \overrightarrow{U} \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_3} &= \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \times \overrightarrow{U} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_3} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \underbrace{(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3})}_{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3}} \times \overrightarrow{U}$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}}$

c Application : coordonnées sphériques



Le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est le « solide géométrique » LIÉ au référentiel $\mathcal{R}$.
Le repère $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ est le « solide géométrique » LIÉ au référentiel $\mathcal{R}'$ tel que : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$.
Le repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est le « solide géométrique » LIÉ au référentiel $\mathcal{R}_1$ tel que : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}$.

• D'après la composition des vecteurs rotation :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}}$$

• d'où :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1}}^{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_r}$$
$$= (\dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}) \times \overrightarrow{e_r} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}\ \underbrace{\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_r}}_{\sin\theta\ \overrightarrow{e_\varphi}}$$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{e_\varphi}} \quad (1)$$

• d'où : $$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1}}^{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_\theta} = (\dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}) \times \overrightarrow{e_\theta} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} + \dot{\varphi}\ \underbrace{\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_\theta}}_{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\ \overrightarrow{e_\varphi}}$$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\ \overrightarrow{e_\varphi}} \quad (2)$$

• d'où : $$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1}}^{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{e_\varphi} = (\dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}) \times \overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_\varphi} \equiv -\dot{\varphi}\overrightarrow{e}.$$

Comme : $\overrightarrow{e} = \sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}$, on obtient : $\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_r} - \dot{\varphi}\cos\theta\ \overrightarrow{e_\theta}}$ (3)

• De plus, comme $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$.

Rq1 : Avec (1) on obtient la vitesse en coordonnées sphériques : $\boxed{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$

Rq2 : On pourrait dériver à nouveau le vecteur vitesse, et, grâce à (1), (2) et (3), obtenir l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques.

d Dérivée temporelle d'un vecteur rotation d'entraînement

• Supposons que $\overrightarrow{U} \equiv \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}$.

La formule de VARIGNON s'écrit alors : $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{0}}$

→ Donc les deux dérivées temporelles sont égales. Comme elles sont indépendantes du choix du référentiel $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}_1$ pour les exprimer, on peut se contenter de noter :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} \equiv \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}}$$

III Loi de composition des vitesses

III.1 Vitesse absolue et vitesse relative

• Pour un point M quelconque, on cherche la relation entre :

$$\begin{cases} \text{sa } \textbf{vitesse absolue}\text{, définie dans le référentiel absolu } \mathcal{R}_a & \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} \equiv \overrightarrow{v_a} \\ \text{sa } \textbf{vitesse relative}\text{, définie dans le référentiel relatif } \mathcal{R}_e & \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_e} \equiv \overrightarrow{v_r} \end{cases}$$

• Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} &= \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO_1}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} \\ &= \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}a}} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_e}}_{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M} \end{aligned}$$

▮D'où la **Loi de Composition des Vitesses** :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}} + \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M} \quad \textbf{(L.C.V.)}$$

III.2 Point coïncidant et vitesse d'entraînement

◇ **Définition :** Le **point coïncidant**, noté M^*, est le point :
① **fixe** dans $\mathcal{R}_e$ ($i.e.$ **lié** à $\mathcal{R}_e$)
② qui **coïncide** avec M...
③ ...**à l'instant** t considéré

Rq : Bien comprendre que le point coïncidant est un point *géométrique*, puisqu'il est fixe dans $\mathcal{R}_e$, et non un point *matériel* comme le point M.

Conséquences : ① $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{v_{M*/\mathcal{R}_e}} = \overrightarrow{0}}$

Dès lors, la loi de composition des vitesses appliquée au point M^* donne :

$$\overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}_a}} = \cancel{\overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}_e}}} + \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M^*} \equiv \overrightarrow{v_e}(M) \quad \text{avec} \quad M^*(t) = M(t)$$

◇ **Définition :** On appelle **vitesse d'entraînement** du point M, notée $\overrightarrow{v_e}(M)$, la vitesse qu'**aurait** le point M dans le référentiel absolu **si** M était fixe dans $\mathcal{R}_e$, c'est-à-dire, **si** M était entraîné par le mouvement d'entraînement du référentiel relatif $\mathcal{R}_e$.

▮**Propriété :** On constate que la **vitesse d'entraînement** du point M correspond à la **vitesse absolue du point coïncidant** M^* : $\overrightarrow{v_e}(M) \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}_a}} \\ \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M} \end{cases}$

▮**Propriété :** La **Loi de Composition des Vitesses** s'écrit donc :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}}}_{\text{vitesse absolue}} = \underbrace{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\overrightarrow{v_e}(M)}_{\text{vitesse d'entraînement}} \quad \textbf{(L.C.V.)}$$

IV Loi de composition des accélérations

IV.1 Accélération absolue et accélération relative

Puisque $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_a}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a}$, on repart de la **Loi de Composition des Vitesses**

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}} + \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M}$$

qu'on dérive par rapport au temps terme à terme :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_a}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}_a}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} + \left(\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a}$$

En introduisant la notation simplifiée $\overrightarrow{\Omega} \equiv \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a}$, ces dérivées deviennent :

- $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_e} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_e}} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}$
- $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}_a}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} \equiv \overrightarrow{a_{O_1/\mathcal{R}_a}}$
- $$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{O_1M})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_a} \\ &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega} \times \left[\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_e} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{O_1M}\right] \\ &= \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{O_1M}) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}\end{aligned}$$

▮D'où la **Loi de Composition des Accélérations** :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_a}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_e}} + \overrightarrow{a_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{O_1M}) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O_1M} + 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}} \quad \textbf{(L.C.A.)}$$

Avec : $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_a}}$ l'**accélération absolue** et $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_e}}$ l'**accélération relative**.

IV.2 Point coïncidant et accélération d'entraînement

Appliquons la **L.C.A.** au point coïncidant M^* sachant que par définition de M^*, puisque le point coïncidant est un point fixe du référentiel relatif :

$$\overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}_e}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_{M^*/\mathcal{R}_e}} = \overrightarrow{0}$$

on obtient, avec $M^*(t) = M(t)$:

$$\overrightarrow{a_{M^*/\mathcal{R}_a}} = \cancel{\overrightarrow{a_{M^*/\mathcal{R}_e}}} + \overrightarrow{a_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{O_1M^*}) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O_1M^*} + 2\overrightarrow{\Omega} \times \cancel{\overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}_e}}}$$

♢ **Définition :** On appelle **accélération d'entraînement** du point M, notée $\overrightarrow{a_e}(M)$, l'accélération qu'**aurait** le point M dans le référentiel absolu **si** M était fixe dans $\mathcal{R}_e$, c'est-à-dire, **si** M était entraîné par le mouvement d'entraînement du référentiel relatif $\mathcal{R}_e$.

▮**Propriété :** Ainsi, l'**accélération d'entraînement** de M correspond à l'**accélération absolue du point coïncidant** M^* : $\overrightarrow{a_e}(M) \equiv \begin{cases} \overrightarrow{a_{M^*/\mathcal{R}_a}} \\ \overrightarrow{a_{O_1/\mathcal{R}_a}} + \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{O_1M}) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O_1M} \end{cases}$

IV.3 Accélération de Coriolis

D'après la définition de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement, la **L.C.A.** s'écrit :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_a}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_e}} + \overrightarrow{a_e}(M) + +2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}}$$

◇ **Définition : Important ! Expression à connaître par cœur !**
On appelle accélération de Coriolis, notée $\overrightarrow{a_C}(M)$, le terme :

$$\overrightarrow{a_C}(M) = 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_a} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_e}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_C}(M) = 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_r}$$

IV.4 Conclusion et remarques importantes

▮**Propriété :** La **Loi de Composition des Accélérations** (**L.C.A.**) s'écrit donc :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_C} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_a}}}_{\text{accél. absolue}} = \underbrace{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_e}}}_{\text{accél. relative}} + \underbrace{\overrightarrow{a_e}(M)}_{\text{accél. d'entraînement}} + \underbrace{\overrightarrow{a_C}(M)}_{\text{accél. de Coriolis}}$$

Rq1 : Dans l'accélération de Coriolis, la vitesse mise en jeu est la vitesse relative !
Rq2 : D'après le programme, l'expression de l'accélération de Coriolis est à connaître par cœur.
Rq3 : L'accélération d'entraînement se trouvera en cherchant à exprimer, au cas par cas, l'accélération du point coïncidant.
Rq4 : Attention, excepté un cas exceptionnel (➜ Cf §**V**), on a : $\overrightarrow{a_e} \neq \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_e}}{\mathrm{d}t}$

V Mouvement d'entraînement par translation ➜ Cf Cours

VI Mouvement d'entraînement par rotation ➜ Cf Cours