EXM6.4 Trois Méthodes

1) a) $\vec{L}_{O/R}(M) = \vec{OM} \times m\vec{v}_{M/R} = R\vec{e_r} \times mR\dot\theta\vec{e_\theta} = mR^2\dot\theta\vec{e_z}$ soit $\left(\dfrac{d\vec{L}_{O/R}}{dt}\right)_R = mR^2\ddot\theta\vec{e_z}$

la réact° du support $\vec{R}$ passe par O donc $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \times \vec{R} = \vec{0}$

le moment du poids en O est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})} = -mgR\sin\theta\,\vec{e_z}$$

le moment de la tension du ressort en O est $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \times \vec{T} = \vec{OM} \times (-k\vec{AM})$

avec $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$

d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \times (+kR\vec{e_y} - k\vec{OM}) = R\vec{e_r} \times kR\vec{e_y} = \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times kR \begin{vmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})}$

d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = kR^2\cos\theta\,\vec{e_z}$

TMC en O : $\left(\dfrac{d\vec{L}_{O/R}}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \cancel{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R})} + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$

$$mR^2\ddot\theta = -mgR\sin\theta + kR^2\cos\theta$$

soit $\ddot\theta + \dfrac{g}{R}\sin\theta - \dfrac{k}{m}\cos\theta = 0$ qui est l'équat° du mouv^t de M

$$\boxed{\ddot\theta + \omega_1^2\sin\theta - \omega_0^2\cos\theta = 0} \quad \text{avec } \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

b) Appliquons le PFD à {M, m} dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$m\vec{a}_{M/R} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{T}$

Comme il n'y a pas de frottement, $\vec{R}$ est dirigée perpendiculairement à $\vec{e_\theta}$.

On a donc, en projection selon $\vec{e_\theta}$:

$$m\,a_\theta = 0 + m\vec{g}\cdot\vec{e_\theta} - k\vec{AM}\cdot\vec{e_\theta}$$

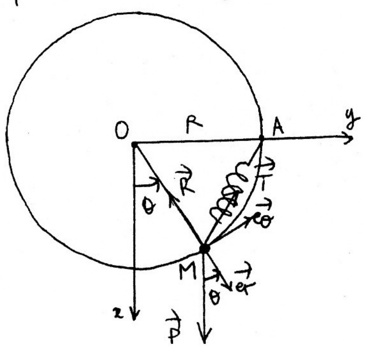
$-k\vec{AM}\cdot\vec{e_\theta} = -k\vec{AO}\cdot\vec{e_\theta} - \cancel{k\vec{OM}\cdot\vec{e_\theta}} = +kR\cos\theta$

$m\vec{g}\cdot\vec{e_\theta} = -mg\sin\theta$

$a_\theta = R\ddot\theta + \cancel{2\dot R\dot\theta}$

$\rightarrow mR\ddot\theta = -mg\sin\theta + kR\cos\theta$

d'où $\boxed{\ddot\theta + \omega_1^2\sin\theta - \omega_0^2\cos\theta = 0}$



1c) Thm de l'énergie mécanique :

$d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = \delta W(\vec{R}) = \vec{R}\cdot d\vec{OM} = 0$ car $\vec{R} \perp d\vec{OM}$ $\forall t$. ($\vec{R}$ ne travaille pas puisqu'il n'y a pas de frottements)

d'où

$\mathcal{E}_m = cte$ avec $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{pg} + \mathcal{E}_{pe}$

$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$

$\mathcal{E}_{pg} = -mgx + cte = -mgR\cos\theta + (cte)$ (la verticale est descendante)

$\hookrightarrow$ prenons-la égale à 0

$\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}k\,AM^2$

avec $AM^2 = (\vec{AO} + \vec{OM})^2 = R^2 + R^2 + 2\vec{AO}\cdot\vec{OM} = 2R^2 + 2R^2\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = 2R^2(1 - \sin\theta)$

d'où $\mathcal{E}_{pe} = kR^2(1 - \sin\theta)$

d'où $\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - mgR\cos\theta + kR^2(1 - \sin\theta) = cte$ $\quad\downarrow \frac{d}{dt}$

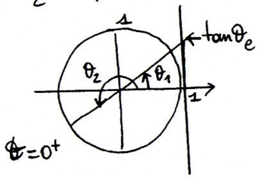
$\cancel{\frac{1}{2}}mR^2\cancel{2\dot\theta}\ddot\theta + mgR\cancel{\dot\theta}\sin\theta - kR^2\cancel{\dot\theta}\cos\theta = 0$ $\quad\downarrow \times\frac{1}{mR^2}$

$$\boxed{\ddot\theta + \omega_1^2\sin\theta - \omega_0^2\cos\theta = 0} \quad (*)$$

2) • lorsqu'il y a équilibre, on a $\theta = cte$ soit $\dot\theta = 0$ et $\ddot\theta = 0$ d'où $\xrightarrow{(*)}$ $\omega_1^2\sin\theta_e - \omega_0^2\cos\theta_e = 0$

soit $\tan\theta_e = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2}$ $\rightarrow$ 2 solutions : $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

$$\boxed{\theta_1 = \arctan\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi}$$



Au voisinage de θ_e, on a $\theta = \theta_e + \varepsilon$, avec $\begin{cases} \ddot\theta = \ddot\varepsilon \quad \text{et } \varepsilon \ll \theta \text{ pour } t = 0^+ \\ \sin\theta = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin\theta_e\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\cos\theta_e \simeq \sin\theta_e + \varepsilon\cos\theta_e \\ \cos\theta = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos\theta_e\cos\varepsilon - \sin\theta_e\sin\varepsilon \simeq \cos\theta_e - \varepsilon\sin\theta_e \end{cases}$

d'où (*) devient :

$\ddot\varepsilon + \omega_1^2(\sin\theta_e + \varepsilon\cos\theta_e) - \omega_0^2(\cos\theta_e - \varepsilon\sin\theta_e) = 0 \iff \ddot\varepsilon + (\omega_1^2\cos\theta_e + \omega_0^2\sin\theta_e)\varepsilon = 0$

car $\omega_1^2\sin\theta_e - \omega_0^2\cos\theta_e \equiv 0$

d'où :

$\ddot\varepsilon + K\varepsilon = 0$ avec $K = \omega_1^2\cos\theta_e + \omega_0^2\sin\theta_e$

• Pour $\theta_e = \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $K = \Omega^2 > 0$ et on a : $\ddot\varepsilon + \Omega^2\varepsilon = 0$ soit $\varepsilon = A\cos(\Omega t + \varphi$

$\rightarrow$ Oscillations harmoniques de période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ autour de la position d'équilibre stable θ_1.

• Pour $\theta_e = \theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$: $K = -\Omega^2 < 0$

et on a $\ddot\varepsilon - \Omega^2\varepsilon = 0$ soit $\varepsilon = A\exp\Omega t + B\exp(-\Omega t)$

$\rightarrow$ Équilibre instable car $|\theta| \nearrow$ (on quitte irrémédiablement θ_2).