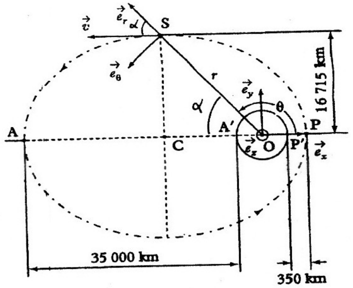
EXM6.3 Satellite



1) $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(S) = \vec{OS} \times m\vec{v}_{S/\mathcal{R}_g}$

$= OS.\,m\,v.\,\sin\alpha\;\vec{e_z}$

Or $\sin\alpha = \dfrac{CS}{OS}$ ↑ OCS

↳ $\boxed{\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(S) = m\,v\,CS\;\vec{e_z} = L\,\vec{e_z}}$

Rque on retrouve $L_{O/\mathcal{R}_g}(S) = m\,v\,a\,\vec{e_z}$ avec $a \equiv$ distance entre le centre de fce et le support de $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$ pour un mvt plan (cf M6)

AN : $L = m\,v\,CS = 10^3 . \dfrac{14\,650}{3{,}6} . 16\,715.10^3$ ↳ $\boxed{L \simeq 6{,}8.\,10^{13}\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}}$

⚠ $1\,t = 10^3\,kg$ et $1\,m.s^{-1} = 3{,}6\,km.h^{-1}$

Rque : • $2a = CA + CP = AA' + 2R_T + P'P = 48\,150$ km $\longrightarrow$ $OC = a - PP' - R_T = 17\,325$ k

• Thm de Pythagore : $OS = \sqrt{OC^2 + CS^2} = 24\,074$ km

• $\tan\alpha = \dfrac{CS}{CO} \longrightarrow \alpha = \arctan\dfrac{CS}{CO} = 44°$

↳ $L = m\,v\,CS = OS\;m\,v\,\sin\alpha = 6{,}8.10^{13}\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$ On retrouve le m̂ résultat bien sûr.

2) $\{S, m\}$ ds $\mathcal{R}_g$ soumis à $\vec{F} = -F\vec{e_r}$

Thm du moment cinétique en O : $\left(\dfrac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(S)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OS} \times \vec{F} = \vec{0}$

d'où $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(S) = \vec{cte} = \vec{OS} \times m\vec{v}_{S/\mathcal{R}_g} = m r^2 \dot\theta\,\vec{e_z}$

d'où $L = cte = m r^2\dot\theta = OS\;m\,v\,\sin\alpha$ où $\alpha = (\vec{OS}, \vec{v}_{S/\mathcal{R}_g})$.

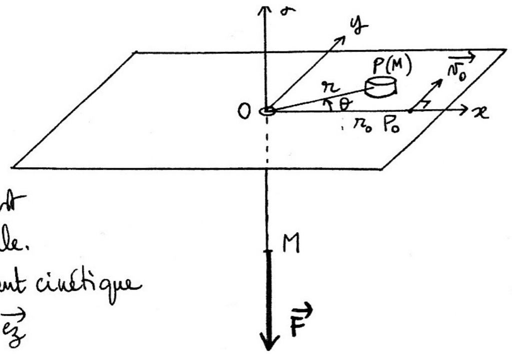
• Pour $\left.\begin{array}{l} S = A \\ S = P \end{array}\right\}$ $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ⊛ $\rightarrow$ $L = OA\;m\,v_A = OP\;m\,v_P$

• d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} v_A = \dfrac{L}{m\,OA} = \dfrac{L}{m\,(AA' + R_T)} = 1{,}6.10^3\ m.s^{-1} \simeq 5{,}9.10^3\ km.h^{-1} \\[2ex] v_P = \dfrac{L}{m\,OP} = \dfrac{L}{m\,(R_T + P'P)} = 1{,}0.10^4\ m.s^{-1} \simeq 3{,}6.10^4\ km.h^{-1} \end{array}}$$

⊛ car r_A et r_P correspondent aux extrema de r $\rightarrow$ $\dot r = 0$ en θ_A et θ_P
$\rightarrow \vec{v} = \cancel{\dot r\vec{e_r}} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta} \perp \vec{OM} = r\,\vec{e_r}$

Ex-M7.1



1) • {P, palet de masse M} : soumis à $\vec{P}$ (poids), $\vec{R}$ (réact° du plan horizontal, sans frottement) et la tension du fil : $\vec{T} = -F\vec{e_r}$

$\underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{\vec{0}} + \vec{T} = -F\vec{e_r}$: le mouvement est un mouvement à force centrale.

• ↳ Il y a donc conservation du moment cinétique (cf cours) : $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(P) = \vec{cte} = M r^2\dot\theta\,\vec{e_z}$

d'où $r^2\dot\theta = cte = r_0\,r_0\dot\theta_0$

Or initialement, la vitesse étant orthoradiale : $\vec{v_0} = \left(\cancel{\dot r}\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta}\right)_{(t=0)} = r_0\dot\theta_0\,\vec{e_\theta}{}_{(t=0)}$

d'où $v_0 = r_0\dot\theta_0$

d'où $\boxed{r^2\dot\theta = C = r_0 v_0 \;.\; = \text{cte des aires}}$ $\Big\}$ $\rightarrow$ $\boxed{\dot\theta(t) = \dfrac{r_0 v_0}{(r_0 - Vt)^2}}$

• Comme $r(t) = r_0 - Vt$, on en déduit :

• le PFD appliqué au palet donne $M\vec{a}_{P/\mathcal{R}} = \cancel{\vec{P} + \vec{R}} + \vec{T}$

soit, selon $\vec{e_r}$: $M(\ddot r - r\dot\theta^2) = -F$

avec $\ddot r = \dfrac{d^2(r_0 - Vt)}{dt^2} = 0$ $\Big\}$ $\rightarrow$ $\boxed{F = M r\dot\theta^2 = \dfrac{MC^2}{r^3} = \dfrac{M r_0^2 v_0^2}{(r_0 - Vt)^3}}$

Cl : $F \longrightarrow \infty$ lorsque $\left|\begin{array}{l} r \to 0 \\ t \to \dfrac{r_0}{V} \\ \text{le palet atteint O} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ l'opérateur sera limité par la force maximale qu'il peut exercer, à moins que le fil ne casse avant !

2) On a vu que l'opérateur exerce à l'instant t la force $F(t) = \dfrac{M r_0^2 v_0^2}{r^3}$

le travail élémentaire fourni par cet opérateur est : $\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\,d\vec{OM} = -F\vec{e_z}.\;dz\,\vec{e_z}$

avec $\left\{\begin{array}{l} dz = dr \quad \text{(le fil est toujours tendu)} \\ dz < 0 \end{array}\right.$ $\longrightarrow$ $dz = d(r_0 - Vt) = V\,dt$

d'où $W_{r_1 \to r_2}(\vec{F}) = \displaystyle\int \delta W(\vec{F}) = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{M r_0^2 v_0^2}{r^3}\,dr = \frac{M r_0^2 v_0^2}{2}\,\Big|\, r^{-2}\Big|_{r_0}^{r_1}$

↳ $\boxed{W(\vec{F}) = \dfrac{1}{2} M r_0^2 v_0^2 \left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{r_0^2}\right) > 0}$

Or, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à P donne $\Delta E_k = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F})$ ↘ car $W(\vec{F}) = W(\vec{T})$ pour un fil tendu !

d'où $W(\vec{F}) = \Delta E_k = \dfrac{1}{2} M v_1^2 - \dfrac{1}{2} m v_0^2 = \dfrac{1}{2} M\left(r_1^2\dot\theta_1^2 - v_0^2\right) = \dfrac{1}{2} M\left(\dfrac{r_1^4\dot\theta_1^2}{r_1^2} - \dfrac{r_0^2 v_0^2}{r_0^2}\right)$

d'où $\boxed{W(\vec{F}) = \dfrac{1}{2} M r_0^2 v_0^2 \left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{r_0^2}\right)}$. on retrouve bien la même expression.