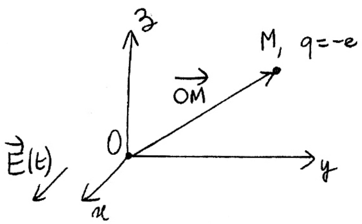
EXMS-5 Couleur du Ciel

1) {électron} étudié dans le référentiel supposé galiléen lié au centre de l'atome.

- force électrique $\vec{F}_{el} = -e\vec{E}(t)$
- force de liaison élastique $\vec{F}_e = -k\overrightarrow{OM}$
- force de frottement fluide $\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
- poids $\vec{P} = m\vec{g}$ négligeable devant les fces électromagnétique $\vec{F}_e, \vec{F}_{el}$



PFD : $m\vec{a}_{M/R} = \cancel{\vec{P}} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_e + \vec{F}_f$ soit $m\ddot{\overrightarrow{OM}} = -e\vec{E}(t) - k\overrightarrow{OM} - h\dot{\overrightarrow{OM}}$

d'où $\ddot{\overrightarrow{OM}} + \dfrac{h}{m}\dot{\overrightarrow{OM}} + \dfrac{k}{m}\overrightarrow{OM} = -\dfrac{e}{m}\vec{E}(t)$

$$\boxed{\ddot{\overrightarrow{OM}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\overrightarrow{OM}} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = -\frac{e}{m}\vec{E}(t) \quad (*) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{rad.s}^{-1} \quad Q = \frac{m\omega_0}{h} \ggg 1}$$

↳ la fréquence propre associée à ω_0 : $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

la longueur d'onde associée à ω_0 :

$\lambda_0 = \dfrac{c}{f_0} = \dfrac{2\pi c}{\omega_0} \cong 180$ nm $\Rightarrow$ U.V.

2) $\vec{E}(t) = E_0\cos\omega t\,\vec{e}_x = \vec{E}_0\cos\omega t$. Le régime forcé correspond à une solut° particuli de $(*)$ avec second membre → on cherche donc une solution vectorielle selon $\vec{e}_x$

→ project° de $(*)$ selon $\vec{e}_x$:

$\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = -\dfrac{e}{m}E_0\cos\omega t$ avec $\boxed{\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{e}_x \quad x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)}$

→ passage en complexes : $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{X}e^{j\omega t}$ et $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$.

↳ $\underline{X}\left(-\omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = -\dfrac{e}{m}E_0 \longrightarrow \underline{X} = \dfrac{-eE_0}{m\omega_0^2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}$

$\underline{X} = X_m e^{j\varphi} = \dfrac{+\frac{jeE_0}{m\omega_0^2}}{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + j\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)}$ soit $\boxed{X_m = \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}$

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

3) $\lambda_b = \dfrac{2\pi c}{\omega_b} \rightarrow \omega_b = 4{,}7 \cdot 10^{15}$ rad.s-1

$\lambda_r = \dfrac{2\pi c}{\omega_r} \rightarrow \omega_r = 2{,}3 \cdot 10^{15}$ rad.s-1

$\forall\lambda \in [\lambda_b, \lambda_r]$: $\omega < \omega_0 \rightarrow \boxed{X_m \simeq \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2} \text{ et } \varphi \simeq \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi}$

4) $\overrightarrow{OM} = X_m\cos(\omega t + \pi)\,\vec{e}_x = -X_m\cos\omega t\,\vec{e}_x = -\dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}\cos\omega t\,\vec{e}_x = -\dfrac{e}{m\omega_0^2}\vec{E}(t)$.

$\dot{\overrightarrow{OM}} = X_m\omega\sin\omega t\,\vec{e}_x$ et $\ddot{\overrightarrow{OM}} = \omega^2 X_m\cos\omega t\,\vec{e}_x = \dfrac{e\omega^2}{m\omega_0^2}E_0\cos\omega t\,\vec{e}_x$.

→ la puissance rayonnée par l'électron dans une longueur d'onde donnée est :
$\langle\mathcal{P}\rangle = K$ amplitude de l'accélérat°.

d'où $\langle\mathcal{P}_b\rangle = K\left(\dfrac{e\omega_b^2}{m\omega_0^2}E_0\right)^2$ et $\langle\mathcal{P}_r\rangle = K\left(\dfrac{e\omega_r^2}{m\omega_0^2}E_0\right)^2$

d'où $\dfrac{\langle\mathcal{P}_b\rangle}{\langle\mathcal{P}_r\rangle} = \left(\dfrac{\omega_b}{\omega_r}\right)^4 = \left(\dfrac{2\pi c}{\lambda_b}\dfrac{\lambda_r}{2\pi c}\right)^4 \rightarrow \boxed{\dfrac{\langle\mathcal{P}_b\rangle}{\langle\mathcal{P}_r\rangle} = \left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 = 2^4 = 16}$

↳ ainsi, la puissance rayonnée par l'électron est maximale pour une radiation bleue ⇒ le ciel est donc bleu.