EXM5.2 Déphasage de la Vitesse p/r à la force excitatrice

$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t) = F_m\cos(\omega t+\psi) \rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m}\cos(\omega t+\psi) \quad \text{avec } \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q=\frac{m\omega_0}{h}}$

puisqu'en régime forcé $x(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi_x)$

on peut introduire la notation complexe $\underline{X}=X_m e^{j\varphi_x}e^{j\omega t}$ et $\underline{f}=\underline{F}e^{j\omega t}$ avec $\underline{F}=F_m e^{j\psi}$

d'où $\underline{X}\left(\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) = \frac{\underline{F}}{m}$

On cherche la vitesse $v\equiv\dot{x} = V_m\cos(\omega t+\varphi)$; en complexe : $\underline{V}=j\omega\underline{X}$

d'où $\underline{V} = \dfrac{j\omega \frac{\underline{F}}{m}}{\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \dfrac{\frac{F_m}{m}}{-j\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)+\frac{\omega_0}{Q}}e^{j\psi} = V_m e^{j\varphi}$

d'où $\dfrac{\frac{F_m}{m}}{\left[-j\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)+\frac{\omega_0}{Q}\right]V_m} = e^{j\varphi_v}$ où $\varphi_v \equiv \varphi-\psi$ est le déphasage de v p/r à $f(t)$

soit $e^{-j\varphi_v} = \cos\varphi_v - j\sin\varphi_v = \dfrac{-j\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)V_m}{\frac{F_m}{m}} + \dfrac{\frac{\omega_0}{Q}V_m}{\frac{F_m}{m}}$

On peut toujours poser $2\alpha\equiv\frac{\omega_0}{Q}$ (α est le coefficient d'amortissement)

alors $\boxed{\sin\varphi_v = \dfrac{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)V_m}{\frac{F_m}{m}} \quad \text{et} \quad \cos\varphi_v = \dfrac{2\alpha V_m}{\frac{F_m}{m}}}$

2) le travail élémentaire fourni par la force excitatrice est :

$\delta\mathcal{T} \equiv f(t)\,dx = f(t)\,v(t)\,dt = F_m\cos(\omega t+\psi)\,V_m\cos(\omega t+\varphi)\,dt$

$= \frac{F_mV_m}{2}\left[\cos(\psi-\varphi)+\cos(2\omega t+\psi+\varphi)\right]dt.$

d'où, sur une période : $\mathcal{T} = \int_0^T\delta\mathcal{T} = \int_0^T \frac{F_mV_m}{2}\left[\cos(\underbrace{\psi-\varphi}_{-\varphi_v})+\cos(2\omega t+\psi+\varphi)\right]dt$

$\mathcal{T} = \frac{F_mV_m}{2}\left[\cos\varphi_v\, T - \cancel{\frac{1}{2\omega}\left|\sin(2\omega t+\psi+\varphi)\right|_0^T}\right]$ $\quad\mathcal{T}=\frac{F_mV_m}{2}T\cos\varphi_v$

$\Rightarrow \mathcal{T} = \frac{\cancel{F_m}V_m}{2}T\,\dfrac{2\alpha V_m}{\frac{\cancel{F_m}}{m}} = \frac{V_m^2}{2}Tm\frac{\omega_0}{Q} = \frac{V_m^2}{2}T\cancel{m}\frac{h}{\cancel{m}}$

d'où $\boxed{\mathcal{T} = \frac{hV_m^2}{2}T}$

Rque : Or le travail des forces de frottement sur une période est :

$\mathcal{T}_f = \int_0^T\delta\mathcal{T}_f = \int_0^T -h\dot{x}.dx = \int -h\dot{x}^2dt = -hV_m^2\, T\,\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt}_{\langle\cos^2\rangle=\frac{1}{2}}$

d'où $\mathcal{T}_f = -\frac{hV_m^2}{2}T$

d'où $\mathcal{T}+\mathcal{T}_f=0$: Sur une période le travail fourni par la force excitatrice compense le travail des fces de frottements.