EXM9.5 Réf galiléen : le sol $\mathcal{R}$

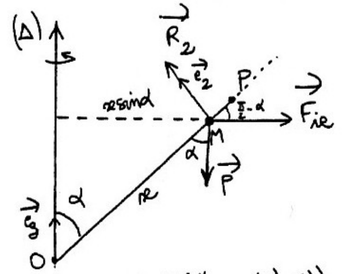
Réf NON galiléen : le système tournant $\mathcal{R}'$: un repère cartésien de $\mathcal{R}'$ est $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ (réf lié à la tige)

1) Déterminat° de la Condition d'équilibre

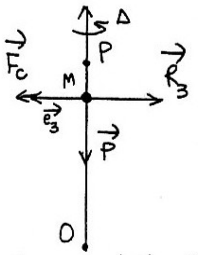
Bilan des forces :
- le poids $\vec{P}$
- la réaction de la tige : $\vec{R} = \cancel{R_1 \vec{e_1}} + R_2 \vec{e_2} + R_3 \vec{e_3}$ car aucun frottem^t sur la tige
- Forces d'inertie :

– d'entraînement : $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM} = m\omega^2 x \sin\alpha \left(\sin\alpha\, \vec{e_1} - \cos\alpha\, \vec{e_2}\right)$

– de Coriolis : $\vec{F_c} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = -2m\omega \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 2m\omega \sin\alpha\, \dot{x}\, \vec{e_3}$ $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$



Tige vue de "profil" (plan $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$)



Tige vue de "face" (plan $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$)

Dans $\mathcal{R}'$ il y a équilibre relatif lorsque $m\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_c}$

soit, en projection selon $\vec{e_1}$: $0 = -mg\cos\alpha + m\omega^2 x \sin^2\alpha$

d'où : $x = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$ (*)

la Position d'équilibre n'existe que si $M \in [O, P]$: soit $x \leq \ell$

soit $\dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \leq \ell$ soit $\omega^2 \geq \dfrac{g\cos\alpha}{\ell\sin^2\alpha}$

soit $\boxed{\omega \geq \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{\ell\sin^2\alpha}}}$

2) Position de l'anneau pour $\omega = \omega_1 \geq \omega_0$ (*) → $\boxed{x_1 = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega_1^2\sin^2\alpha}}$

Rque : Si $\omega \to \infty$ (vitesse angulaire ↗) : $x_1 \to 0$: l'anneau vient en O.

3) Stabilité de l'équilibre :

Si le mobile est écarté de sa position d'équilibre : on peut lui appliquer la relation fondamentale de la dynamique ds $\mathcal{R}'$ non galiléen :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_c}$$

→ En projection selon (Ox) $(\vec{e_1})$: $m\ddot{x} = -mg\cos\alpha + m\omega^2 x \sin\alpha = f_x$

qu'on peut écrire : $\ddot{x} - \omega^2\sin\alpha\, x = -g\cos\alpha$

solution : $x(t) = x_p + x_G = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin\alpha} + A e^{-\sqrt{\omega^2\sin\alpha}\, t} + B e^{+\sqrt{\omega^2\sin\alpha}\, t}$

si $t \nearrow$ $|x| \to \infty$: équilibre instable

Que l'équilibre selon Ox était instable était immédiat puisque :

$\left(\dfrac{df_x}{dx}\right)_{x_{eq}} = +m\omega^2\sin^2\alpha > 0$: si $dx > 0$ $df > 0$: f_x croît si $x \nearrow$
si $dx < 0$ $df < 0$: f_x décroît si $x \searrow$

Dans les deux cas il apparaît que f_x tend à éloigner le mobile de sa position d'équilibre.