EXM 9-3

1) $v_{/R_T} = (\dot x^2 + \dot y^2)^{\frac{1}{2}}$ avec $\dot y = \frac{dy}{dt} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = f'\dot x$

→ $v = \dot x(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}$

↳ $\dot y = \frac{f' v}{\sqrt{1+f'^2}}$ $\ddot y = \frac{d\dot y}{dt} = \frac{d}{dx}\left[\frac{f'v}{\sqrt{1+f'^2}}\right]\dot x$

$$= \frac{f''v\sqrt{1+f'^2} - f'v\,2f'f''(1+f'^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1+f'^2)}\dot x$$

$$= \frac{f''v\left((1+f'^2) - f'^2\right)(1+f'^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1+f'^2)}\frac{v}{(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\ddot y = \frac{v^2 f''}{(1+f'^2)^2}}$$

2) Dans R_1 non galiléen, on doit tenir cpte des fces d'inertie (celle de Coriolis étant nulle car $\vec\Omega_{R_1/R_T} = \vec 0$)

$m\vec a_{A/R_1} = \vec T + m\vec g - m\vec a_e \longrightarrow m\ddot y_1 = -k(y_1 - l_0) - mg - \frac{mv^2 f''}{(1+f'^2)^2}$

où $\vec a_e = \vec a_{M^*/R} = \vec a_{O_1/R}$ car R_1 en translat° p/r à R

3) Comme A est immobile ds R_1, il vient : $\vec T = -m\vec g + m\vec a_e$

soit en project° selon $(O_1 y_1)$: $T = -k(y_1 - l_0) = mg + \frac{mv^2 f''}{(1+f'^2)^2}$

Pour une bosse $f'' = \frac{d^2f}{dx^2} < 0 \Rightarrow |T| < mg$

Pour un creux $f'' = \frac{d^2f}{dx^2} > 0 \Rightarrow |T| > mg$

le module de $\vec T$ $|T|$ représente le Poids Apparent

4) Profil parabolique $y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \longrightarrow f' = -\frac{2hx}{l^2}$ et $f'' = \frac{-2h}{l^2} < 0$

alors la tension du ressort en S vaut : $T_{(S)} = mg\left(1 - \frac{2hv^2}{gl^2}\right)$

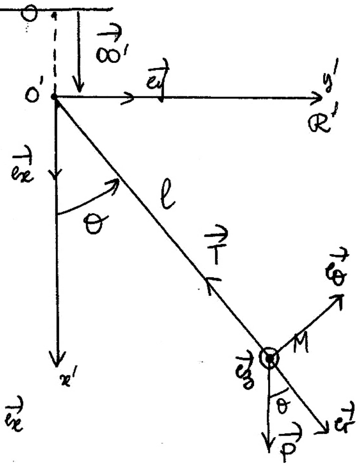
Il y a impesanteur lorsque le poids apparent est nul $T_{(S)} = 0 \Rightarrow \boxed{v = l\sqrt{\frac{g}{2h}}}$

EXM 9,4 Pendule "simple"

1) R' est en translat° à vitesse variable p/r à R qui est galiléen ⇒ R' n'est pas galiléen.

2) Thm du mom^t cinétique en O' dans R' (seul réf où O' est fixe !)

$$\left(\frac{d\vec L_{O'/R'}(M)}{dt}\right)_{R'} = \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec P) + \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec T) + \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_{ie}) + \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_c) \quad (*)$$



$\vec P = m\vec g = mg\vec e_x = mg \begin{vmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}_{(\vec e_r,\vec e_\theta,\vec e_z)}$

$\vec T = -T\vec e_r$ tension du fil

$\vec F_{ie} = -m\vec a_e = -m\vec a_{M^*/R} = -m\vec a_{O'/R} = -m\left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_R$

mvmt d'entraînement de translat° de R' p/r à R

or $\vec{OO'} = D_m\cos\omega t\,\vec e_x$ d'où $\vec a_{O'/R} = -\omega^2 D_m\cos\omega t\,\vec e_x$

d'où $\vec F_{ie} = -m\vec a_e = +mD_m\omega^2\cos\omega t\,\vec e_x = mD_m\omega^2\cos\omega t \begin{vmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}_{(\vec e_r,\vec e_\theta,\vec e_z)}$

$\vec F_c = -m\vec a_c = -m\,2\cancel{\vec\Omega_{R'/R}} \times \vec v_{M/R'} = \vec 0$ car R' en translat° p/r à R

d'où $\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec P) = \vec{O'M}\times\vec P = -mgl\sin\theta\,\vec e_z$

$\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec T) = \vec{O'M}\times\vec T = \vec 0$ et $\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_c) = \vec{O'M}\times\cancel{\vec F_c} = \vec 0$

$\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_{ie}) = -lmD_m\omega^2\cos\omega t\sin\theta\,\vec e_z$

Comme $\vec L_{O'/R'}(M) = \vec{O'M}\times m\vec v_{M/R'} = l\vec e_r \times ml\dot\theta\,\vec e_\theta = ml^2\dot\theta\,\vec e_z \rightarrow \left(\frac{d\vec L_{O'/R'}}{dt}\right)_{R'} = ml^2\ddot\theta\,\vec e_z$

d'où (*) s'écrit selon $\vec e_z$: $\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot\theta = -\cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta - \cancel{l}\cancel{m}D_m\omega^2\cos\omega t\sin\theta$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta\left(1 + \frac{D_m\omega^2}{g}\cos\omega t\right) = 0}$$

$\ddot\theta + \omega_0^2(1+h(t))\sin\theta = 0$	
avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$	$h(t) = \frac{D_m\omega^2}{g}\cos\omega t$