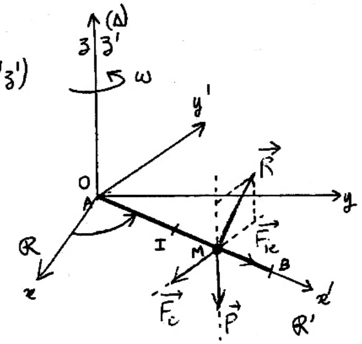
Ex M9.2 Tige horizontale en rotation autour de (Δ) vertical



Référentiel galiléen R : le sol → $(Oxyz)$

Référentiel non galiléen : R' lié à la tige tournante → $(Ox'y'z')$

Étude du mouvement de l'anneau M{m} ds R' :

Bilan des forces ds R' :

- $\vec P$ poids
- forces d'inertie | d'entraînement : $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = -m\vec{a}_{M^*/R} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$

  | de Coriolis : $\vec{F_c} = -m\vec{a_c} = -m\,2\vec{\Omega}_{R'/R} \times \vec{v}_{M/R'}$

$\vec R$ réact° de la tige : $\vec R \perp \overrightarrow{AB}$ car il n'y a pas de frottements

On exprime simplement ces forces en utilisant la base $(\vec{e_{x'}}, \vec{e_{y'}}, \vec{e_{z'}})$ de R'

$\vec P = -mg\,\vec{e_{z'}}$ $\quad \vec{F_{ie}} = m\omega^2 x'\,\vec{e_{x'}}$ $\quad \vec{F_c} = -2m\,\omega\,\vec{e_{z'}} \times \frac{dx'}{dt}\vec{e_{x'}} = -2m\omega\dot{x}'\,\vec{e_{y'}}$

$$\vec R = \underbrace{R_{y'}\vec{e_{y'}}}_{\text{composante horizontale}} + \overbrace{R_{z'}\vec{e_{z'}}}^{\text{composante verticale}}$$

PFD → $m\vec{a}_{M/R'} = \vec P + \vec{F_{ie}} + \vec{F_c} + \vec R$

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = m\omega^2 x' & ① \\ 0 = -2m\omega\dot{x}' + R_{y'} & ② \\ 0 = -mg + R_{z'} & ③ \end{cases}$$

① → Mvmt selon $(Ox') = (AB)$

$\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0$

↳ $x' = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

A, B) cstes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales :

à $t = 0$ $\quad x' = \frac{\ell}{2} = A + B$

$v' = \frac{dx'}{dt} = \dot{x}' = A\omega - B\omega = 0 \Rightarrow A = B$

$\Rightarrow A = B = \frac{\ell}{4}$

$$\boxed{x' = \frac{\ell}{4}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) = \frac{\ell}{2}\,\mathrm{ch}\,\omega t}$$

en introduisant le cosinus hyperbolique

2) Date t_1 d'arrivée de l'anneau M à l'extrémité de la tige (B) :

- à $t = t_1$ on a $x'(t_1) = x'(M = B) = \ell$

  d'où $\ell = \frac{\ell}{2}\,\mathrm{ch}\,\omega t_1$ ⟶ $\boxed{t_1 = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{argch}\,2}$

- la vitesse de l'anneau en B : $v'_B = \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t_1} = \frac{\ell\omega}{2}\,\mathrm{sh}\,\omega t_1$

  or | $\mathrm{ch}^2\omega t_1 - \mathrm{sh}^2\omega t_1 = 1$ d'où $\mathrm{sh}^2\omega t_1 = 3$ soit $\mathrm{sh}\,\omega t_1 = \sqrt{3}$

  | avec $\mathrm{ch}\,\omega t_1 = 2$

→ $\boxed{v'_B = \frac{\ell\omega}{2}\sqrt{3}}$

3) Réaction de la tige en B : ② → $R_y = 2m\omega v'_B$ → $R_y = m\ell\omega^2\sqrt{3}$

③ → $R_z = mg$

soit $R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2}$ $\quad \boxed{R_{(M=B)} = m\sqrt{g^2 + 3\ell^2\omega^4}}$