$\{M,m\}$ dans $\mathcal{R}'$ subit 4 forces : le poids $\vec{P} = -mg\cos\ \vec{e_r} + mg\sin\ \vec{e_\varphi}$

la réaction $\vec{R} = \underbrace{R_r\,\vec{e_r}}_{\vec{0}} + R_\varphi\,\vec{e_\varphi} + R_\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{0}$ car il n'y a pas de frottement.

la fce d'inertie d'entraînem^t : $\vec{F}_{ie} = -m\,\vec{a}_e(M) = -m\,\vec{a}_{M^*/\mathcal{R}}$

M^* a un mv^t circulaire uniforme de rayon HM, de centre H, de vitesse angulaire Ω

$\hookrightarrow\ \vec{F}_{ie} = +m\,\Omega^2\,\vec{HM} = m\Omega^2 x'\sin\varphi\,(\sin\varphi\,\vec{e_r} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi})$

la fce d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_c = -2m\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$

soit $\vec{F}_c = -2m \begin{vmatrix} \Omega\cos\varphi \\ -\Omega\sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -2m\,\Omega\sin\varphi\,\dot{x}'\,\vec{e_\theta}$

$(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta})$

Alors le PFD ds $\mathcal{R}'$ s'écrit : $m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_c$, soit, ds la base $(\vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z'}) = (\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta})$:

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x}' = \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -mg\cos & + m\Omega^2 x'\sin^2\varphi & \\ mg\sin & + R_\varphi & + m\Omega^2 x'\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & + R_\theta & - 2m\Omega\sin\varphi\,\dot{x}' \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \rightarrow R_\varphi = R_{y'} = mg\sin\varphi + m\Omega^2 x'\sin\varphi\cos\varphi \\ \rightarrow R_\theta = R_{z'} = 2m\Omega\sin\varphi\,\dot{x}' \end{matrix}$$

l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{x}' - \Omega^2\sin^2\varphi\, x' = -g\cos\varphi}$ avec $\varphi = \underline{\underline{cte}}$.

2) Posons $\omega_0 = \Omega\sin\varphi$ alors la solution est : $x'(t) = \underbrace{A\,e^{\omega_0 t} + B\,e^{-\omega_0 t}}_{x_G(t)} + \underbrace{\frac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}}_{x_p = cte}$

à $t=0$ $\begin{cases} x'(0) = x_0 = A + B + \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2} \\ v(0) = v_0 = (A-B)\,\omega_0 \end{cases}$ Soit : $\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{v_0}{\omega_0} - \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}\right). \\ B = \dfrac{1}{2}\left(x_0 - \dfrac{v_0}{\omega_0} - \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}\right) \end{cases}$

Alors l'expression de $x'(t)$ devient :

$$\boxed{x'(t) = \left(x_0 - \frac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}\right)\mathrm{ch}\,\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\,\mathrm{sh}\,\omega_0 t + \frac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}}$$

3) Si M est à l'équilibre, alors $x' = x_{eq} = cte$ soit $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$.

l'éq du mouvement devient $x' = \dfrac{g\cos\varphi}{\Omega^2\sin^2\varphi}$ c'est possible si $\boxed{x_{eq} = \dfrac{g\cos\varphi}{\Omega^2\sin^2\varphi}}$

4) On écarte la bille de sa position d'équilibre : alors, les conditions initiales sont $x_0 = x_{eq} + \xi$ et $v_0 = 0$ pour $t = 0$. avec $|\xi| \ll x_{eq}$

pour $t > 0$ on a donc : $x'(t) = \left(\cancel{x_{eq}} + \xi - \cancel{\dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}}\right)\mathrm{ch}\,\omega_0 t + \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}$

Soit $x'(t) = \xi\,\mathrm{ch}\,\omega_0 t + \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2} \longrightarrow \pm\infty$ si $t \nearrow$

$\longrightarrow$ <u>la bille quitte le tube.</u> $\hookrightarrow$ <u>l'équilibre est INSTABLE.</u>

5) A $t = 0$ $\begin{vmatrix} x'(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{vmatrix}$ Pour quelle durée t_1 a-t-on $x'(t_2) = \dfrac{\ell}{2}$?

on a : $\dfrac{\ell}{2} = \left(x_0 - \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}\right)\mathrm{ch}\,\omega_0 t_2 + \dfrac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}$

Alors : $\boxed{t_2 = \dfrac{1}{\omega_0}\,\mathrm{arcch}\,\dfrac{\frac{\ell}{2} - \frac{g\cos\varphi}{\omega_0^2}}{x_0 - \frac{g\cos\varphi}{\omega^2}}}$ avec $\omega_0 \equiv \Omega\sin\varphi$

6) <u>AN</u> : $\Omega = 2\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

$\ell = 10$ m et $\varphi = 45°$ $\rightarrow$ $\boxed{t_2 \simeq 1{,}2\ s.}$

$x_0 = 4$ m

On a $t_2 > t_1$: le temps d'éjection est plus grand lorsque le tube est incliné que lorsqu'il est horizontal.

Ceci vient du fait que dans le cas $\boxed{\mathrm{III}}$, la force d'inertie centrifuge est plus faible et qu'il faut tenir compte du poids (ce qui n'est pas le cas en $\boxed{\mathrm{I}}$).

7) Pour déterminer la réaction du tube, il faut revenir au PFD cf III.1 :

$\vec{R} = R_{y'}\,\vec{e_{y'}} + R_{z'}\,\vec{e_{z'}} = R_\varphi\,\vec{e_\varphi} + R_\theta\,\vec{e_\theta}$ avec $\lVert\vec{R}\rVert = \sqrt{R_\varphi^2 + R_\theta^2}$	$R_\varphi = mg\sin\varphi + m\Omega^2\sin\varphi\cos\varphi\ x'$ $R_\theta = 2m\,\Omega\sin\varphi\,\dot{x}'$