$$\begin{array}{|l|l|l|l|l|} \hline & & & & \\ m & \ddot{x}' & = & -mg\sin\theta + m\Omega^2 x' & \\ & \ddot{y}' & & -mg\cos\theta + R_\theta - 2m\Omega\dot{x}' & \\ R' & \ddot{z} & & 0 + R_z & \\ \hline \end{array} \quad \begin{cases} \theta = \Omega t \\ \text{avec } \ddot{y}' = 0 \text{ et } \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

car le mouvement de la bille est selon $\vec{e}_{x'}$

$$\rightarrow \quad m\ddot{x}' = -mg\sin(\Omega t) + m\Omega^2 \dot{x}' \rightarrow \boxed{\ddot{x}' - \Omega^2 x' = -g\sin(\Omega t)}$$

2) La solution de l'éq. différentielle est : $x'(t) = x'_G(t) + x'_P(t)$ — sol particulière de l'éq. AVEC 2d membre — sol. générale de l'éq. SANS 2d membre

on a $x'_G(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$

$x'_P(t) = C\sin\Omega t$ (car le 2d membre est sinusoïdal et avec une phase nulle à $t=0$)

Pour déterminer C, il faut que $x'_P(t)$ vérifie l'éq. diff :

$\ddot{x}'_P(t) - \Omega^2 x'_P(t) = -g\sin\Omega t \rightarrow -\Omega^2 C\sin\Omega t - \Omega^2 C\sin\Omega t = -g\sin\Omega t$

d'où : $C = \dfrac{g}{2\Omega^2}$ soit : $x'(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \dfrac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t$

Pour déterminer A et B, il faut que $x'(t)$ vérifie les conditions initiales :

$$\begin{cases} x'(0) = x_0 = A + B \\ \dot{x}'(0) = v_0 = (A - B)\Omega + \dfrac{g}{2\Omega} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_0}{\Omega} - \dfrac{g}{2\Omega^2}\right) \\ B = \dfrac{x_0}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_0}{\Omega} - \dfrac{g}{2\Omega^2}\right) \end{cases}$$

soit : $\boxed{x'(t) = x_0 \operatorname{ch}\Omega t + \left(\dfrac{v_0}{\Omega} - \dfrac{g}{2\Omega^2}\right)\operatorname{sh}\Omega t + \dfrac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t}$ (*)

3) Si M est à l'équilibre alors $x'(t) = cte \rightarrow \dot{x}'(t) = 0$ et $\ddot{x}'(t) = 0$.

Alors l'équation différentielle du mouvement s'écrit $\ddot{x}' - \Omega^2 x'(t) = -g\sin\Omega t$

d'où $\dot{x}'(t) = \dfrac{g}{\Omega^2}\sin\Omega t \neq cte \Rightarrow$ Ce : Il n'existe PAS de position d'équilibre l'hypothèse $x' = cte$ était fausse.

4) On veut que le mouvement soit sinusoïdal.

L'expression (*) donnant $x'(t)$ est de la forme sinusoïdale à condition que :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ v_0 = \dfrac{g}{2\Omega} \end{array}} \quad \text{alors} \quad \boxed{x'(t) = \frac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t = \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t}$$

5) Lorsque la vitesse initiale vérifie : $v_0 = \dfrac{g}{2\Omega} - x_0\Omega$, alors : $\dfrac{v_0}{\Omega} - \dfrac{g}{2\Omega^2} = -x_0$

Soit $x'(t) = x_0(\operatorname{ch}\Omega t - \operatorname{sh}\Omega t) + \dfrac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t \rightarrow \boxed{x'(t) = x_0 e^{-\Omega t} + \dfrac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t}$

6) L'énoncé (recopié tel quel) semble erroné : il est impossible que $x_0 = \ell$ car au mieux on peut avoir $x' = \dfrac{\ell}{2}$ si on souhaite que M soit à l'intérieur du tube dont la longueur est ℓ et centré en O !

Supposons donc que l'énoncé (pour cette question II seulement !) concernait un tube de longueur $2\ell = L$

alors $x_0 = \dfrac{L}{2} = \ell$. avec (1) $\ell = 10\,m$, (2) $\ell = 1\,m$ et (3) $\ell = 0{,}1\,m$.

A $t=0$ $x'(0) = x_0 = \ell$, lorsque $t \rightarrow \infty$ on a $x'(t) \rightarrow \dfrac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t = X_m \sin\Omega t$

avec $X_m = \dfrac{g}{2\Omega^2} \simeq 1{,}2\,m$ pour $\Omega = 2\,rad.s^{-1}$

Dans le cas (1) : on aperçoit sur le graphe le régime transitoire $(x_0 e^{-\Omega t})$ et comme $X_m < \dfrac{L}{2}$, la bille reste dans le tube.

Dans les cas (2) et (3) : comme $\ell < X_m$ on ne distingue plus le régime transitoire mais avec $X_m > \dfrac{L}{2}$, on voit que très vite la bille quitte le tube.

7) Pour étudier la réaction du tube sur la bille il faut projeter le PFD (établi en II.1)) selon $\vec{e}_{y'}$ et $\vec{e}_x$:

selon $\vec{e}_x \rightarrow \quad 0 = R_x$

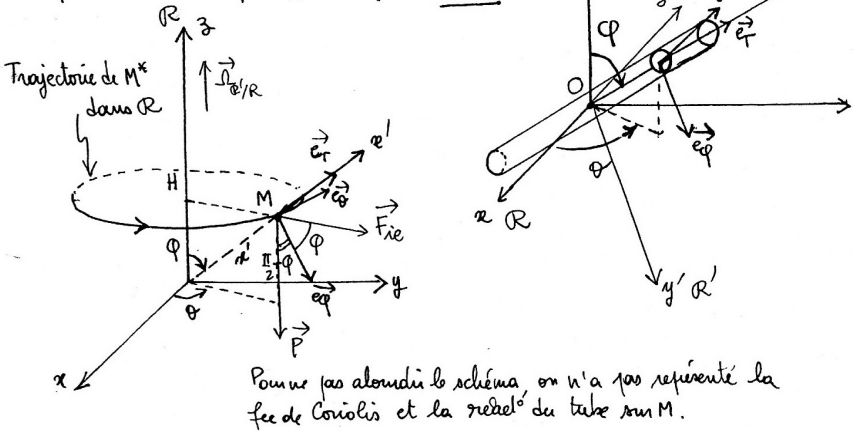
selon $\vec{e}_{y'} \rightarrow \quad 0 = -mg\cos\theta + R_\theta - 2m\Omega\dot{x}'$

$$R_{y'} = +mg\cos\Omega t + 2m\Omega\left[x_0\Omega\operatorname{sh}\Omega t - \left(\frac{v_0}{\Omega} - \frac{g}{2\Omega^2}\right)\Omega\operatorname{ch}\Omega t + \frac{g}{2\Omega}\cos\Omega t\right]$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = \left(2mg\cos\Omega t + 2m\Omega^2 x_0 \operatorname{sh}\Omega t + m(g - 2v_0\Omega)\operatorname{ch}\Omega t\right)\vec{e}_{y'}}$$

III

1) Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel tournant autour de la direction $\vec{e}_z$ de $\mathcal{R}$ galiléen. La base cartésienne $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ de $\mathcal{R}'$ correspond à la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ dans $\mathcal{R}$.



Pour ne pas alourdir le schéma, on n'a pas représenté la force de Coriolis et la réaction du tube sur M.