IV

1) À l'équilibre relatif ds $\mathcal{R}'$, $\theta =$ cte soit $\begin{cases} \dot\theta = 0 \\ \ddot\theta = 0 \end{cases}$ alors (*) donne : $-g\sin\theta_e + \Omega^2 a(1+\sin\theta_e)\cos\theta_e = 0$ 3/

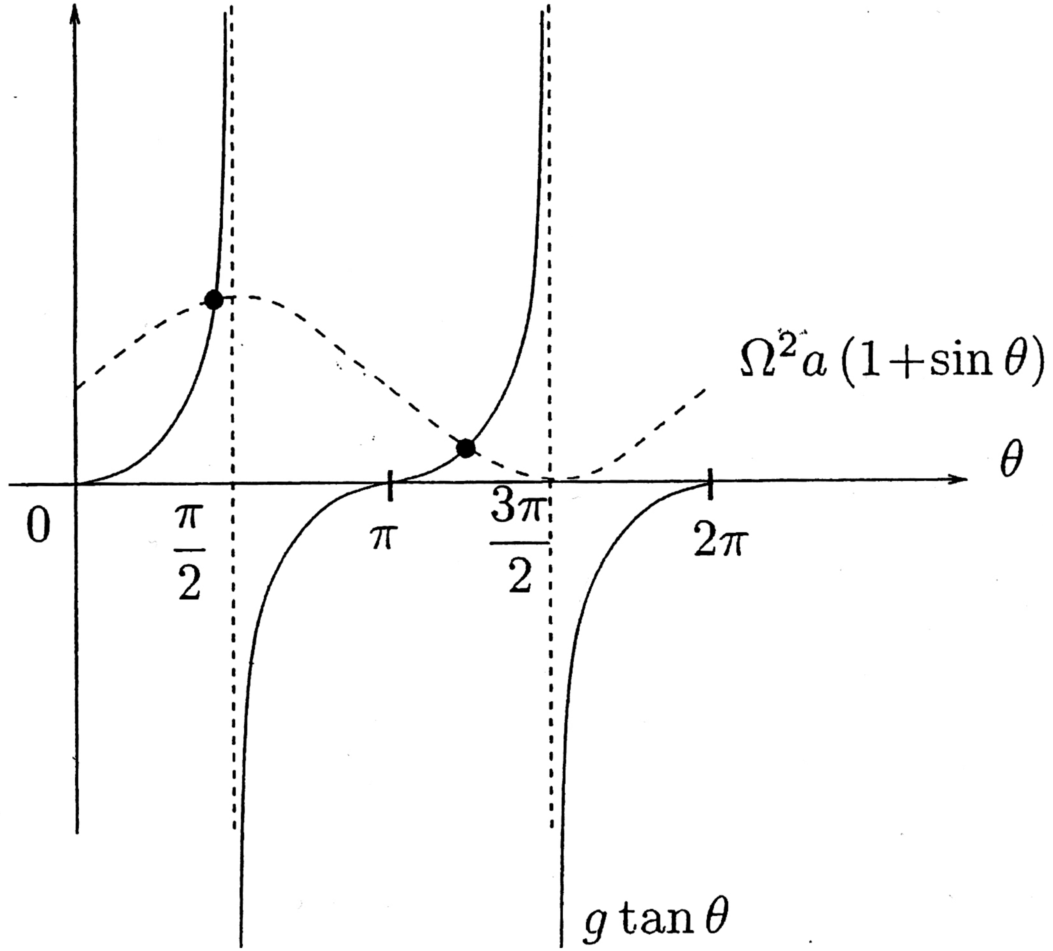
soit $\boxed{\tan\theta_e = \dfrac{\Omega^2 a}{g}(1+\sin\theta_e)}$ $\Leftrightarrow$ $g\tan\theta_e = \Omega^2 a(1+\sin\theta_e)$

2) Traçons sur un même graphe les fonctions $\begin{cases} g\tan\theta_e \text{ et} \\ \Omega^2 a(1+\sin\theta_e) \end{cases}$

Les intersections des deux courbes correspond aux solutions cherchées.

$\rightarrow$ 2 positions d'équilibre :

$\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.



3) On veut que $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$; la vitesse angulaire correspondante est :

$$\Omega_1^2 = \frac{g}{a}\,\frac{\tan\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}} \longrightarrow \boxed{\Omega_1 = \sqrt{\frac{g\tan\frac{\pi}{6}}{a(1+\sin\frac{\pi}{6})}} = \sqrt{\frac{g\ \sqrt{3}}{a(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}}}$$

4) Pour savoir si une position d'équilibre est stable il faut chercher le signe de $\left(\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_e}$.

$$E_p(\theta) = -m\Omega^2 a^2 \sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta}{2}\right) + mga(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -m\Omega^2 a^2\cos\theta(1+\sin\theta) + mga\sin\theta = ma\left[-\cos\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{g}{\Omega^2 a}\sin\theta\right]\Omega^2 a$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma\left[\sin\theta - \cos 2\theta + \frac{g}{\Omega^2 a}\cos\theta\right]\Omega^2 a$$

Pour $\theta = \theta_1$ $\quad \dfrac{g}{\Omega^2 a} = \dfrac{1+\sin\theta_1}{\sin\theta_1}\cos\theta_1$ $\quad$ cf 3°)

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma^2\Omega^2\,\frac{1}{\sin\theta_1}\left[\sin^2\theta_1 - \sin\theta_1\cos 2\theta_1 + (1+\sin\theta_1)\cos^2\theta_1\right]$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma^2\Omega^2\,\frac{1}{\sin\theta_1}\left[1 - \sin\theta_1(\cancel{\cos^2\theta_1} - \sin^2\theta_1) + \sin\theta_1\cancel{\cos^2\theta_1}\right]$$

$$\boxed{\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma^2\Omega^2\,\frac{1+\sin^3\theta_1}{\sin\theta_1}} \underset{\text{pour } \theta_1 = \frac{\pi}{6}}{>0}$$ donc l'équilibre θ_1 est STABLE.