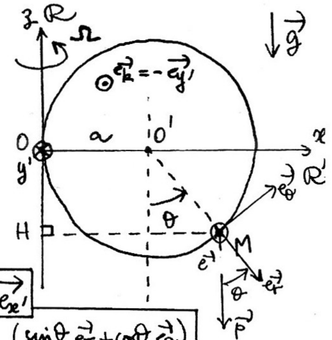
CORRECTION DL n°12 : Mouvement d'un anneau sur un Cerceau



I $\{M, m\}$ étudié ds le référentiel R' qui est non galiléen puisqu'en rotation autour de Oz ds R.

M est soumis : • à son poids $\vec P = m\vec g = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$

• à la réact° du cerceau $\vec R \perp \vec{e_\theta}$ car $\vec R \perp \vec v_{M/R'}$ puisqu'il n'y a pas de frottement et que $\vec v_{M/R'} = a\dot\theta\,\vec{e_\theta}$

• à la force d'inertie d'entraînement

2) $\boxed{\vec F_{ie} = -m\vec a_e(M) = -m\vec a_{M^*/R} = +m\Omega^2\overrightarrow{HM} = m\Omega^2(a+a\sin\theta)\vec e_{x'}}$

→ $\boxed{\vec F_{ie} = m\Omega^2(a+a\sin\theta)(\sin\theta\,\vec{e_r}+\cos\theta\,\vec{e_\theta})}$

• à la fce d'inertie de Coriolis :

3) $\vec F_c = -m\vec a_c(M) = -m2\vec\Omega_{R'/R}\times\vec v_{M/R'} = -2m\begin{vmatrix}-\Omega\cos\theta\\ \Omega\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\ a\dot\theta\\ 0\end{vmatrix} = \boxed{-2ma\dot\theta\Omega\cos\theta\,\vec e_{y'}}$ $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_k})$

car $\vec{e_k} \equiv -\vec e_{y'}$ ⚠

1) PFD dans R' : $\boxed{m\vec a_{M/R'} = \vec P + \vec R + \vec F_{ie} + \vec F_c}$

4) ↳ $m\begin{vmatrix}\cancel{\ddot a} - a\dot\theta^2\\ a\ddot\theta + \cancel{2\dot a\dot\theta}\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}mg\cos\theta\\ -mg\sin\theta\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}R_r\\ 0\\ R_k\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}m\Omega^2(a+a\sin\theta)\sin\theta\\ m\Omega^2(a+a\sin\theta)\cos\theta\\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 2ma\dot\theta\Omega\cos\theta\end{vmatrix}$ $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_k})$

→ Projection selon $\vec{e_\theta}$: $\boxed{a\ddot\theta = -g\sin\theta + \Omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$

5) → Projection selon $\vec{e_r}$: $R_r = -ma\dot\theta^2 - mg\cos\theta - m\Omega^2 a(1+\sin\theta)\sin\theta$

Projection selon $\vec e_{y'} = -\vec{e_k}$: $R_{y'} = 2ma\dot\theta\Omega\cos\theta$

II

1) $\boxed{\vec L_{O'/R'}(M) = \overrightarrow{O'M}\times m\vec v_{M/R'} = a\vec{e_r}\times ma\dot\theta\vec{e_\theta} = ma^2\dot\theta\,\vec{e_k}}$

2) $\boxed{\underbrace{\left(\frac{d\vec L_{O'/R'}(M)}{dt}\right)_{R'}}_{ma^2\ddot\theta\,\vec{e_k}} = \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec P) + \underbrace{\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec R)}_{\overrightarrow{O'M}\times\vec R\,//\,\vec{e_\theta}} + \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_{ie}) + \underbrace{\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_c)}_{\overrightarrow{O'M}\times\vec F_c\,//\,\vec{e_\theta}}}$

} nécessairement les moments de ces 2 fces se compensent

3) $\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec P) = \begin{vmatrix}a\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}mg\cos\theta\\ -mg\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}$ $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_k})$ $= -mag\sin\theta\,\vec{e_k}$

$\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_{ie}) = \begin{vmatrix}a\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}m\Omega^2 a(1+\sin\theta)\sin\theta\\ m\Omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta\\ 0\end{vmatrix} = m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\cos\theta$

le théorème du Mt Cinétique donne en projection selon $\vec{e_k}$:

$ma^2\ddot\theta = -mag\sin\theta + m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\cos\theta$

↳ $\boxed{a\ddot\theta = -g\sin\theta + \Omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$ On obtient bien la même équation qu'en I 4)

4) Explicitons $\vec{\mathcal M}_{O'}(\vec R) + \vec{\mathcal M}_{O'}(\vec F_c) = \vec 0$ comme on l'a démontré en 3)

$\begin{vmatrix}a\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}R_r\\ 0\\ R_k + 2ma\dot\theta\Omega\cos\theta\end{vmatrix} = \vec 0 \iff \boxed{R_{y'} = -R_k = 2ma\dot\theta\cos\theta\,\Omega}$

Mais on ne peut tirer aucun renseignement sur R_r avec cette méthode.

III

1) $\vec F_{ie} = m\Omega^2(a+a\sin\theta)(\sin\theta\,\vec{e_r}+\cos\theta\,\vec{e_\theta})$

$d\overrightarrow{OM} = a\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

↳ $\delta W(\vec F_{ie}) = \vec F_{ie}\cdot d\overrightarrow{O'M} = m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta = +m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\,d\sin\theta$

$\delta W(\vec F_{ie}) = -d\left[-\frac{m\Omega^2a^2}{2}(1+\sin\theta)^2\right] = -d\mathcal{E}_{pie}$

↳ $\boxed{\mathcal{E}_{pie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2HM^2 + cte = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)^2 + cte}$

2) $\mathcal{E}_{pg} = mgz + cte = -mga\cos\theta + cte$

↳ $\boxed{\mathcal{E}_{pg} = mga(1-\cos\theta)}$ (cte choisie pour avoir $\mathcal{E}_{pg} = 0$ pour $\theta = 0$).

3) La force de Coriolis et la réact° du cerceau ne travaillant pas, on peut dire qu'elles dérivent d'une énergie potentielle cte $\delta W = 0 = -d\mathcal{E}_p' = -d\,cte$

4) ↳ $\boxed{\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_{pie} + \mathcal{E}_{pg}}$ et $\boxed{d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \text{ soit } \mathcal{E}_{m/R'} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{k/R'} = cte}$

$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pie} + \mathcal{E}_{pg} = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)^2 + cte + mga(1-\cos\theta)$

on veut $\mathcal{E}_p = 0$ pour $\theta = 0$ d'où $cte = \frac{1}{2}m\Omega^2a^2$

↳ $\mathcal{E}_p(\theta) = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2a^2 + mga(1-\cos\theta)$

$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2\sin\theta(2+\sin\theta) + mga(1-\cos\theta)}$

5) ↳ $\boxed{\mathcal{E}_m = -m\Omega^2a^2\sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta}{2}\right) + mga(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2}$

$\frac{d}{dt}\downarrow$ $0 = -m\Omega^2a^2\cos\theta(1+\sin\theta)\cancel{\dot\theta} + mga\cancel{\dot\theta}\sin\theta + ma^2\cancel{\dot\theta}\ddot\theta$

↳ $\boxed{a\ddot\theta = -g\sin\theta + \Omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$ on retrouve bien l'expression de III 4)

(*)