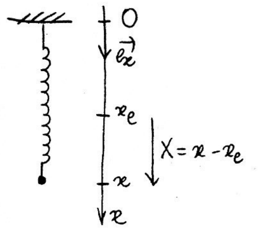
EXM 4.7

1) Oscillateur dans l'air : $m\ddot{x} = P + T = mg - k(x - l_0)$ (2).



à l'équilibre $0 = P + T_{eq} = mg - k(x_e - l_0)$ (1)

(2)-(1) donne : $m\ddot{x} = -k(x - x_e)$

$m\ddot{X} = -kX$

$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$

Oscillat° sinusoïdales : $X = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ de période T_0

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{k}} \rightarrow \boxed{T_0 = 4\pi\sqrt{\frac{\pi\rho r^3}{3k}}}$

2) La sphère est plongée dans le liquide ; à l'équilibre, la somme vectorielle des forces appliquées est nulle :

$\vec{P} + \vec{T}_{eq} + \vec{f} + \vec{F}_A = \vec{0}$ (3) avec

$$\begin{cases} \vec{P} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho\,\vec{g} \\ \vec{F}_A = -\vec{P}_{f\,\text{déplacés}} = -\frac{4}{3}\pi r^3\rho_e\,\vec{g} \\ \vec{f} = -6\pi\cancel{\eta r \vec{v}} \quad \text{car } \vec{v} = \vec{0} \text{ à l'éq.} \\ \vec{T}_{eq} = -k(x_e - l_0)\,\vec{e_x} \end{cases}$$

$\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_e) - k(x_e - l_0) + 0 = 0$ selon $+\vec{e_x}$ vers le bas

$\boxed{x_e = l_0 + \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{k}g(\rho - \rho_e)}$

3) PFD :

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}_{m}\,\ddot{x} = +\underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}_{m}\,g - k(x - l_0) - \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_e}_{m_f}\,g - 6\pi\eta r\dot{x} \quad (4)$$

(4)-(3) → : $\frac{4}{3}\pi r^3\rho\,\ddot{x} + 6\pi\eta r\dot{x} + k(x - x_e) = 0$

Soit $X \equiv x - x_e$: il apparaît : $\boxed{\ddot{X} + \frac{9\eta}{2r^2\rho}\dot{X} + \frac{3k}{4\pi r^3\rho}X = 0}$

$r^2 + \frac{9\eta}{2r^2\rho}r + \frac{3k}{4\pi r^3\rho} = 0$ éq. caractéristique

4) Le régime est pseudo-sinusoïdal lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est négatif ; soit :

$\Delta = \frac{81\eta^2}{4r^4\rho^2} - \frac{3k}{\pi r^3\rho} < 0$ d'où : $\boxed{k > \frac{27\pi\eta^2}{4r\rho}}$

les racines $r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1}{\tau} \pm j\omega_1$ avec $\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k}{\pi r^3\rho} - \frac{81\eta^2}{4r^4\rho^2}}$

d'où $\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{3k}{\pi r^3\rho} - \frac{81\eta^2}{4r^4\rho^2}}}}$

5) L'expression de k peut être déduite de T_0 : $k = \frac{16\pi^3\rho r^3}{3T_0^2}$

$$T_1^2 = \frac{16\pi^2}{\frac{\cancel{3}}{\pi \cancel{r^3}\cancel{\rho}}\,\frac{16\pi^3\cancel{\rho r^3}}{\cancel{3}T_0^2} - \frac{81\eta^2}{4r^4\rho^2}} = \frac{16\pi^2}{\frac{16\pi^2}{T_0^2} - \frac{81\eta^2}{4r^4\rho^2}}$$

$\frac{16\pi^2}{T_0^2} - \frac{81\eta^2}{4r^4\rho^2} = \frac{16\pi^2}{T_1^2}$ d'où $\frac{81}{4r^4\rho^2}\,\frac{\eta^2}{16\pi^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_1^2}$

d'où $\boxed{\eta = \frac{8\pi r^2\rho}{9}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_1^2}}}$

Rque : $[\eta] = M L^{-1} T^{-1}$