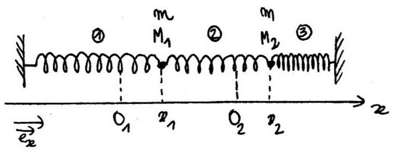
EXM4-6 Oscillateurs Couplés



1) • $\{M_1\}$ soumis à $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ et $\vec{T_①}$ et $\vec{T_②}$

$\vec{T_①}=-k(\ell_1-\ell_0)\vec{e_x}$ Tension exercée par le ressort ① sur M_1

$\vec{T_②}=-k(\ell_2-\ell_0)(-\vec{e_x})$ Tension exercée par le ressort ② sur M_1.

$$\boxed{\begin{aligned}\ell_1&=\ell_0+x_1\\ \ell_2&=\ell_0-x_1+x_2\\ \ell_3&=\ell_0-x_2\end{aligned}}$$

• $\{M_2\}$ soumis à $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ mais aussi à $\vec{T_②}'$ et $\vec{T_③}$

$\vec{T_②}'=-k(\ell_2-\ell_0)\vec{e_x}$ tension exercée par le ressort ② sur M_2 on a $\vec{T_②}'=-\vec{T_②}$

$\vec{T_③}=-k(\ell_3-\ell_0)(-\vec{e_x})$ " " " ③ " "

PFD pour M_1 : $m\ddot{x}_1=-kx_1+k(x_2-x_1)$

PFD pour M_2 : $m\ddot{x}_2=-k(x_2-x_1)+k(-x_2)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2 \quad (1)\\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 \quad (2)\end{aligned}}$$

2) $\omega_0^2\equiv\dfrac{k}{m}$, $x_1=a_1\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2=a_2\cos(\omega t+\varphi)$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases}\ddot{x}_1+2\omega_0^2x_1=\omega_0^2x_2\\ \ddot{x}_2+2\omega_0^2x_2=\omega_0^2x_1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}a_1(2\omega_0^2-\omega^2)&=a_2\omega_0^2 \quad (1)\\ a_2(2\omega_0^2-\omega^2)&=a_1\omega_0^2 \quad (2)\end{aligned}}$

d'où (1) $\Rightarrow a_2=a_1\dfrac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2}$ (1')

(2) $\Rightarrow a_2=a_1\dfrac{\omega_0^2}{2\omega_0^2-\omega^2}$ (2')

$\dfrac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2}=\dfrac{\omega_0^2}{2\omega_0^2-\omega^2}\Leftrightarrow\boxed{(2\omega_0^2-\omega^2)^2=\omega_0^4}$ (3)

3) (3) admet pour solutions : $\begin{cases}2\omega_0^2-\omega^2=+\omega_0^2\\ 2\omega_0^2-\omega^2=-\omega_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{aligned}\omega&=\omega_0\\ \omega&=\sqrt{3}\,\omega_0\end{aligned}}$ 2 solutions possibles

4) Pour $\omega=\omega_0$ (1'),(2') $\Rightarrow a_2=a_1$ Soit $x_1=a_1\cos(\omega_0t+\varphi)$ $x_2=a_1\cos(\omega_0t+\varphi)$

Pour $\omega=\sqrt{3}\,\omega_0$ (1'),(2') $\Rightarrow a_2'=-a_1'$ $x_1'=a_1'\cos(\sqrt{3}\omega_0t+\varphi)$ $x_2'=a_2'\cos(\sqrt{3}\omega_0t+\varphi)$

la Solution générale est donc

$$\begin{aligned}x_1&=a_1\cos(\omega_0t+\varphi)+a_1'\cos(\sqrt{3}\,\omega_0t+\varphi)\\ x_2&=a_1\cos(\omega_0t+\varphi)-a_1'\cos(\sqrt{3}\,\omega_0t+\varphi)\end{aligned}$$

Comme les conditions initiales sont : $\begin{cases}\text{à } t=0\\ \dot{x}_{1_0}=0 \quad x_{1_0}=x_{1m}\\ \dot{x}_{2_0}=0 \quad x_{2_0}=x_{2m}\end{cases}$

on en déduit : $\begin{cases}\dot{x}_1(0)=-\omega_0a_1\sin\varphi-\omega_0\sqrt{3}\,a_1'\sin\varphi=0\\ \dot{x}_2(0)=-\omega_0a_1\sin\varphi+\omega_0\sqrt{3}\,a_1'\sin\varphi=0\end{cases}\Rightarrow\varphi=0$

d'où $\begin{cases}x_1(0)=x_{1m}=a_1+a_1'\\ x_2(0)=x_{2m}=a_1-a_1'\end{cases}$

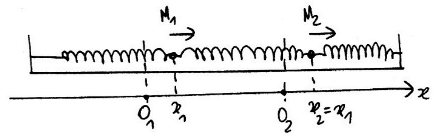
d'où
$$\boxed{\begin{aligned}x_1(t)&=\frac{x_{1m}+x_{2m}}{2}\cos(\omega_0t)+\frac{x_{1m}-x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{3}\,\omega_0t)\\ x_2(t)&=\frac{x_{1m}+x_{2m}}{2}\cos(\omega_0t)-\frac{x_{1m}-x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{3}\,\omega_0t)\end{aligned}}$$

Pour que les mouvements soient harmoniques (ie sinusoïdaux), il faut :

ⓐ Soit $x_{1m}=x_{2m}$

ie $\begin{cases}x_1(t)=x_{1m}\cos\omega_0t\\ x_2(t)=x_1(t)\end{cases}$

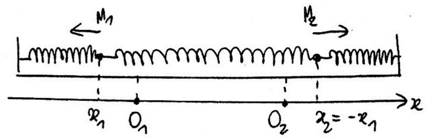
les 2 masses oscillent en phase et ont exactement le m̂ mouvement



ⓑ Soit $x_{1m}=-x_{2m}$

ie $\begin{cases}x_1(t)=x_{1m}\cos(\sqrt{3}\,\omega_0t)\\ x_2(t)=-x_1(t)\end{cases}$

les 2 masses oscillent en opposition de phase



★ Solution Ex-M4.8 ▸

$$\frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}+\omega_0^2\,\overrightarrow{OM}=\vec{0},\quad \ddot{x}+\omega_0^2\,x=0,\quad \ddot{y}+\omega_0^2\,y=0,$$

$$x_{(t)}=x_0\cos\omega_0t,\quad y_{(t)}=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0t,\quad \frac{x^2}{x_0^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}=1,$$

trajectoire elliptique (Fig. 1) ;

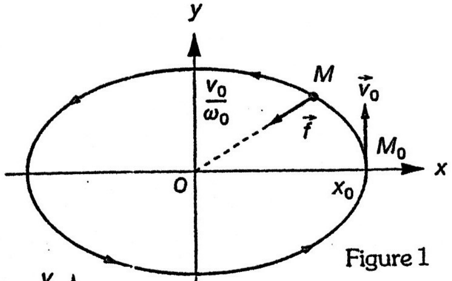


Figure 1

$$\frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}+\omega_0^2\,\overrightarrow{OM}=\vec{0},$$

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\omega_0^2\,x=0,$$

$$\ddot{y}+\frac{\alpha}{m}\dot{y}+\omega_0^2\,y=0,\quad \Delta=\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2-4\,\omega_0^2=0,$$

$$x_{(t)}=x_0\,(1+\omega_0t)\,e^{-\omega_0t},\quad y_{(t)}=v_0\,t\,e^{-\omega_0t},$$

trajectoire de M en figure 2.

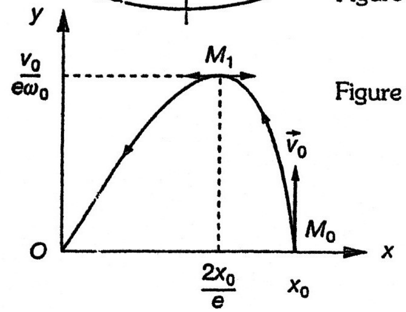


Figure 2