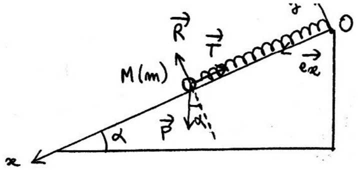
EXM4.1 Ressort Incliné



- $\{M, m\}$ considéré c 1 pt matériel.
- réf d'étude : réf terrestre considéré c galiléen
- Bilan des forces exercées sur $\{M\}$:
  - le Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
  - la tension du ressort : $\vec{T} = -k(l-l_0)\vec{e_x} = -k(x-l_0)\vec{e_x}$
  - la réaction du support $\vec{R} = \vec{R_N} + \cancel{\vec{R_T}}$ ($\vec{R_T} = \vec{0}$ car il n'y a aucun frottements)

1) A l'équilibre P.F.D. $\Rightarrow$ $m\cancel{\vec{a}} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T_e} + \vec{R}$ (1)

en projection selon $\vec{e_x}$: $0 = mg\sin\alpha - k(x_e - l_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_e = l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}}$

2) Hors équilibre : P.F.D. : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$ (2)

(2) − (1) $\Rightarrow$ $m\vec{a} = \vec{T} - \vec{T_e} = -k(x-l_0)\vec{e_x} + k(x_e - l_0)\vec{e_x} = -k(x-x_e)\vec{e_x}$

$\hookrightarrow$ en projection selon $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -k(x - x_e)$ (3)

posons $X \equiv x - x_e$

alors (3) s'écrit : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $X \equiv x - x_e$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Solution : $X = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

les Conditions Initiales sont : $\begin{cases} X(t=0) = x(t=0) - x_e = D = X_m\cos\varphi \\ \dot{X}(t=0) = \dot{x}(t=0) - 0 = 0 = -X_m\omega_0\sin\varphi \end{cases}$

D'où $\varphi = 0$ et $X_m = D$

D'où $\boxed{x(t) = X(t) + x_e = x_e + D\cos\omega_0 t}$ avec $x_e = l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}$

tous les exercices sont importants et nécessitent d'être compris.
Commencer par les premiers EXM4-1 à 5.

EXM4.3 Oscillateur Amorti

0,25 **1)** le portrait de phase est caractéristique d'un régime libre pseudo-périodique.

2) Graphiquement, on mesure :

0,75

$x_0 = 3$ cm	$x_f = 0$	$T_a = 315$ ms

$\delta = \ln\frac{x(0)}{x(0+T_a)} = \ln\frac{x_0}{x_1}$

$x_1 = x(t = 0 + T_a) \cong 1{,}6$ cm

1 $\hookrightarrow$ $\boxed{\delta = \ln\frac{x_0}{x_1} \cong \ln\frac{3}{1{,}6} \simeq 0{,}628}$

3) Pour exprimer Q, il faut connaître la relation qui le lie à δ.

Rappel : {oscillateur harmonique amorti} : PFD $\rightarrow$ $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On pose $\boxed{\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}}$ et $\boxed{\frac{\omega_0}{Q} \equiv \frac{\lambda}{m}}$ alors, l'éq. diff devient : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (E)

l'équation caractéristique associée à (E) : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

Comme le régime est pseudo-périodique : $\Delta < 0$

$\hookrightarrow$ les racines complexes de l'Eq Caract. sont : $\begin{cases} r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\alpha - j\omega_a \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\alpha + j\omega_a \end{cases}$

avec $\boxed{\alpha \equiv \frac{\omega_0}{2Q}}$ (1) et $\boxed{\omega_a \equiv \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \frac{2\pi}{T_a}}$ (2)

la pseudo pulsation.

d'où $x(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\alpha t}$ $\Rightarrow$ $\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T_a)} = \ln e^{\alpha T_a} = \alpha T_a$

d'où $\delta = \alpha T_a \overset{(1)}{=} \frac{\omega_0}{2Q}\frac{\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{2Q}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \Longleftrightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}}$ (3)

3 d'où (3) $\longrightarrow$ $\boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} \cong 5}$ $\xrightarrow{(2)}$ $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \cong 20{,}0 \text{ rad.s}^{-1}}$

0,75 Et comme $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \boxed{k = m\omega_0^2 \cong 201 \text{ N.m}^{-1}} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \rightarrow \boxed{\lambda = m\frac{\omega_0}{Q} \cong 2 \text{ N.m}^{-1}\text{.s}} \end{cases}$ 0,75

Rque : pour les unités de k et λ il suffit de se rappeler que :
$[F] = [k][l - l_0] = [\lambda][v]$