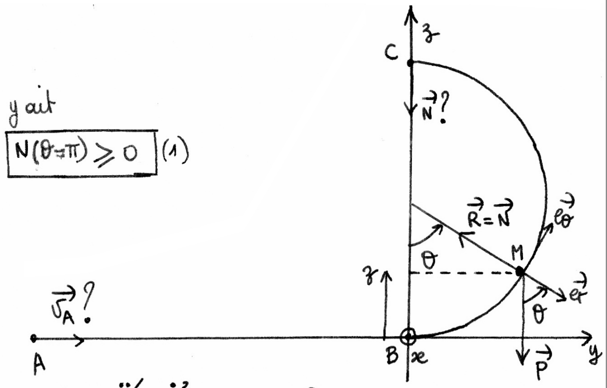
EXM3-11



1) • Si M arrive en C, cela suppose qu'il y ait contact de M sur le support soit : $\boxed{N(\theta=\pi)\geq 0}$ (1)

• Il faut donc exprimer N en fonction de θ.

• Pour cela, appliquons le PFD à {M} ds $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen.

$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_T}=\vec{P}+\vec{R}$

soit, lorsque M est sur la portion $\widehat{BC}$: $m\begin{vmatrix}\cancel{\ddot{r}}-r\dot{\theta}^2\\ r\ddot{\theta}+2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta}\\ \cancel{\ddot{x}}\end{vmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_x})}=\begin{vmatrix}mg\cos\theta\\ -mg\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-N\\ 0\\ 0\end{vmatrix}$ avec $N=\|\vec{R}\|$

d'où, en projection selon $\vec{e_r}$: $-mR\dot{\theta}^2=mg\cos\theta-N$ soit $\boxed{N=mg\cos\theta+mR\dot{\theta}^2}$ (2)

• Rque : Cette relation (2) est valable qu'il y ait des frottement ($\vec{R}=-N\vec{e_r}-f\vec{e_\theta}$) ou pas ($\vec{R}=-N\vec{e_r}$)
↳ Il faudra s'en souvenir à la question 2)

• Or, sur la portion $\widehat{BC}$, le mouvement est circulaire, donc $\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$, et donc $\boxed{R\dot{\theta}^2=\frac{v^2}{R}}$ (3)

• Pour faire apparaître v^2, il suffit d'appliquer le Thm de l'$\mathcal{E}_k$ entre M et un autre point. Comme nous cherchons v_A (N'oublions pas ce que nous cherchons !), on va appliquer le Thm de l'$\mathcal{E}_k$ entre A et M :

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_A^2=\cancel{W(\vec{P})_{A\to B}}+W(\vec{P})_{B\to M}+\cancel{W(\vec{R})}=+mg(\cancel{z_B}-z_M)=-mgz$$

en prenant B comme origine du repère d'espace (Bxyz) –

d'où, comme $z=R(1-\cos\theta)$:

$$\boxed{m\frac{v^2}{R}=m\frac{v_A^2}{R}-2mg(1-\cos\theta)}\quad(4)$$

Alors (2) $\xrightarrow{(3)\,\&\,(4)}$ $N=mg\cos\theta+m\frac{v_A^2}{R}-2mg(1-\cos\theta)$

soit : $$\boxed{N=m\left(\frac{v_A^2}{R}+g(-2+3\cos\theta)\right)}\quad(5)$$

Pour que $M=C$ $(\theta=\pi)$ il faut (1)&(5) $\Rightarrow$ $\frac{v_A^2}{R}+g(-2+3\cos\pi)\geq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_A\geq\sqrt{5gR}}$

$\boxed{\text{AN } v_A\geq 7{,}1\ m.s^{-1}}$

2) Cette fois $\vec{R}=\vec{R_N}+\vec{R_T}=-N\vec{e_r}-f\vec{e_\theta}$ avec $N=\|\vec{R_N}\|$ et $f=\|\vec{R_T}\|$.

↳ on a toujours à chercher v_A / $\boxed{N_{(\theta=\pi)}\geq 0}$ (1) et avec : $\boxed{N=mg\cos\theta+mR\dot{\theta}^2}$ (2)

soit : $\boxed{N=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{R}}$ (2')

• Appliquons le Thm de l'$\mathcal{E}_k$ entre A et M :

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_A^2=W_{A\to M}(\vec{P})+\cancel{W_{A\to M}(\vec{R_N})}+W_{A\to M}(\vec{R_T})$$
$$=-mgz+\int_A^M\vec{R_T}\cdot d\vec{BM}=-mgz+\int_A^B-f\vec{e_y}\cdot dy\,\vec{e_y}+\int_B^M-f\vec{e_\theta}\cdot R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$$

d'où $\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_A^2=-mgR(1-\cos\theta)-f(AB+R\theta)$

d'où $\boxed{m\frac{v^2}{R}=m\frac{v_A^2}{R}-2mg(1-\cos\theta)-2\frac{f}{R}(AB+R\theta)}$ (6)

Alors (2') $\xrightarrow{(6)}$ $\boxed{N=m\left(\frac{v_A^2}{R}+g(-2+3\cos\theta)-\frac{2f}{mR}(AB+R\theta)\right)}$. (7)

Pour que M atteigne C, il faut que $N_{\theta=\pi}\geq 0$ soit :

$$\frac{v_A^2}{R}+g(-2+3\cos\pi)-\frac{2f}{mR}(AB+R\pi)\geq 0$$

d'où $\boxed{v_A\geq\sqrt{5gR+\frac{2f}{m}(AB+R\pi)}}$ $\boxed{\text{AN } v_A\geq 8{,}2\ m.s^{-1}}$