

EX M3.7 : Force de Gravitation - Tunnel Terrestre:

M à la distance $r < R$ (rayon de la Terre): $\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$

1) $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = -mg_0 \frac{r dr}{R}$
 (Coordonnées sphériques)

$\delta W = -d\left(\frac{mg_0 r^2}{2R}\right) \rightarrow E_p = \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} r^2 + C^e$
 On choisit $E_p = 0$ pour $r=0$ soit $C^e = 0$
 $E_p = \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} r^2$

2) Thm de l'énergie mécanique: $dE_m = \delta W_{NC} = 0$ car il n'y a que la force de gravitation, laquelle est conservative.

$E_m = cte = E_k + E_p = E_p(A) = \frac{1}{2} mg_0 R = E_{k,max} + E_{p,min}$

• l'énergie cinétique est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale
 ceci arrive en $M=H$ alors $r=d$

$E_{k,max} = \frac{1}{2} m v_m^2 = E_m - E_p(H) = \frac{1}{2} mg_0 R - \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} d^2$

$v_m^2 = g_0 \left(R - \frac{d^2}{R}\right) \rightarrow v_m = \sqrt{g_0 \left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$ (AN) $v_m = 5 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

• $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x \rightarrow$ composante (à priori algébrique) de \vec{v} selon \vec{e}_x : $v = \dot{x}$

$E_m = E_k + E_p = cte \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} x^2 = cte$

$\frac{d}{dt} m \dot{x} \ddot{x} + \frac{mg_0}{R} x \cdot \dot{x} = 0$

On ne s'intéresse pas à l'équilibre ($\dot{x}=0$) mais au mouvement ($\dot{x} \neq 0$)
 \rightarrow on peut simplifier par $m\dot{x}$

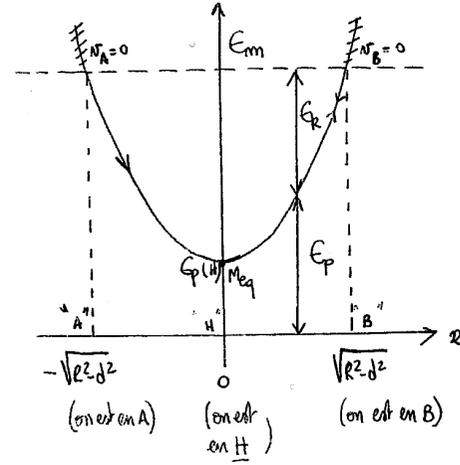
$\ddot{x} + \frac{g_0}{R} x = 0$ soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$

$\vec{HM} = x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $x(t=0) = HA = -\sqrt{R^2 - d^2} = X_m \cos\varphi$
 • (1) ... $x(t=\pi) = -X_m \sin\varphi$

d'où $x_m = -\sqrt{R^2 - d^2}$
 $\varphi = 0$
 $x(t) = -\sqrt{R^2 - d^2} \cos \omega_0 t$

$v(t) = \dot{x}(t) = \omega_0 \sqrt{R^2 - d^2} \sin \omega_0 t \Rightarrow v_{max} = \omega_0 \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{g_0 \left(R - \frac{d^2}{R}\right)} = v_m$ OK

3) $E_p = \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} r^2 = \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} (d^2 + x^2)$
 ↳ Profil Parabolique



• le point H correspond à un équilibre stable d'énergie potentielle MINIMALE $E_p(0) = \frac{mg_0 d^2}{2R}$

• de A \rightarrow H: de l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique
 car $E_m = E_p + E_k = cte = E_p(A)$

donc $v \nearrow$ et est maximale en H
 • de H à B: E_k est convertie en E_p
 jusqu'à avoir $G_k = 0$
 alors nous sommes en B
 ou $E_m = E_p(B)$

• Alors le point rebrousse chemin et effectue le m munt en sens inverse etc \rightarrow oscillation périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$

(Ceci bien sûr suppose qu'il n'y a aucun frottement)

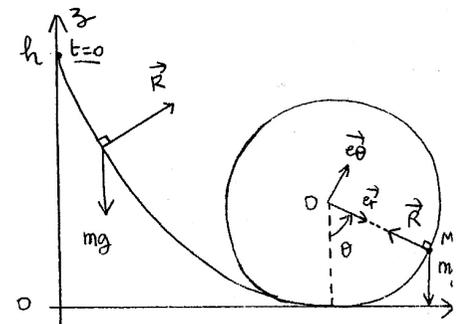
\rightarrow On dit que le point matériel se trouve dans un état UE (la zone de l'espace à laquelle il peut accéder étant LIMITÉE).

EXM3.9 : Toboggan:

PFD: $m \vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} + \vec{R}$ ①

Thm E_k entre $t=0$ et t : $\Delta E_k = W_{\vec{R}} + W_{\vec{P}}$

$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = W_{\vec{P}}$ ②

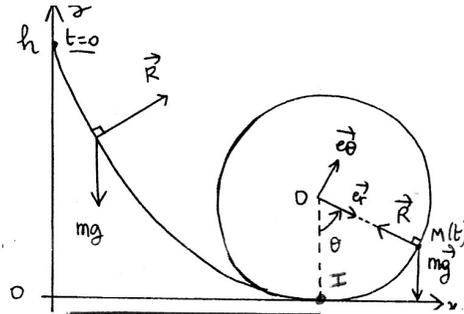


EXM3.9 : Toboggan:

PFD: $m \vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} + \vec{R}$ (1)

Thm E_k entre $t=0$ et t : $\Delta E_k = W_{\vec{R}} + W_{\vec{P}}$

$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = W_{\vec{P}}$ (2)



$v^2 = 2g(h - a(1 - \cos\theta))$ (4)

$a\ddot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(h - a(1 - \cos\theta))$ (*)

$R = m(2g\frac{h}{a} - 2g + 3g\cos\theta)$ (2)

PFD pour le pt M descendant le cercle: $m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}$

soit: $m \begin{cases} -a\ddot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R \\ a\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$ avec $R = \|\vec{R}\|$ $\rightarrow R = m(a\ddot{\theta}^2 + g\cos\theta)$ (**)

2) } (c) M fait des tours complets: $R(\pi) > 0 \rightarrow h \geq h_{\min} = \frac{5a}{2}$

4a) } (a) M effectue des oscillations $\Rightarrow v$ s'annule pour $\theta_1 = \theta_m$ sans que R s'annule

$\begin{cases} v(\theta_1) = 0 \\ R(\theta_1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2(\theta_1) = 2g(h - a + a\cos\theta_1) = 0 \\ R(\theta_1) = \frac{mg}{a}(2h - 2a + 3a\cos\theta_1) \geq 0 \end{cases}$ (1), (2)

(1) $R(\theta_1) = \frac{mg}{a} a\cos\theta_1 > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ Par ailleurs (2) $\Leftrightarrow a\cos\theta_1 \geq \frac{2h-2a}{3}$

pour $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ on a des oscillations $\begin{cases} 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \\ h < a \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow a - h > \frac{2h-2a}{3} \Leftrightarrow 5a > 5h$

4b) } (b) $a < h < \frac{5a}{2}$: M quitte la gouttière et chute.

3) Cas où $\theta = 0$ et $h = \frac{5a}{2}$

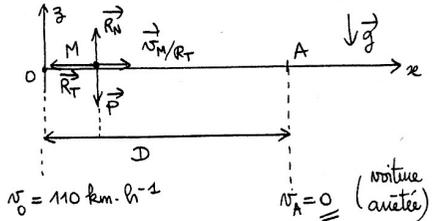
alors (2) devient $R_N(I) = m(2g\frac{h}{a} - 2g + 3g) = m(2g\frac{5}{2} + g) = 6mg$

EXM3-10:

1) Système { Voiture considérée comme un point matériel M de masse m }
 étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

• Bilan des forces: le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la réaction de la route sur la voiture: $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ avec $R_T = f R_N$.



Thm de l' E_k entre O (\vec{v}_0) et A ($\vec{v}_A = 0$):

$\Delta E_{k_{O \rightarrow A}} = \sum_i W(\vec{F}_i)$

$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W(\vec{P} + \vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$ (*)

travail nul car \vec{P} et \vec{R}_N sont perpendiculaires au mouvement (et donc à $d\vec{OM}$)

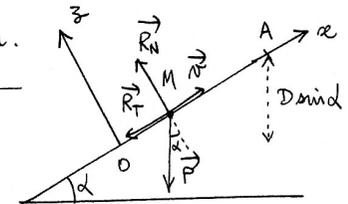
• Par ailleurs le PFD ($m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$) en projection selon Ox donne: $0 = -mg + R_N$
 d'où $R_N = mg$ et donc $R_T = f R_N = fmg$

d'où $W(\vec{R}_T) = \int_0^A \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} = \int_0^A -fmg \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = -fmgD$ (< 0 bien entendu)

(*) devient: $v_0^2 = 2fgD$ soit $D = \frac{v_0^2}{2fg}$ mais on ne connaît pas f , on ne peut donc pas calculer D directement.

Par contre, l'énoncé nous dit que pour une vitesse $v_0' = 130 \text{ km.h}^{-1}$, la distance de freinage est $D' = 500 \text{ m}$

soit $D' = \frac{v_0'^2}{2fg}$ d'où $D = \left(\frac{v_0}{v_0'}\right)^2 D' = 360 \text{ m}$.



2) lorsque la route fait un angle α avec l'horizontale la projection du PFD selon Ox donne:

$R_N = mg \cos\alpha$ et donc $R_T = f R_N = fmg \cos\alpha$

le Théorème de l' E_k entre O et A: $0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W(\vec{R}_N) + W(\vec{P}) + W(\vec{R}_T) = -\Delta E_{P_{g \rightarrow A}} + W(\vec{R}_T)$

Soit: $-\frac{1}{2} m v_0^2 = -mgD \sin\alpha - fmg \cos\alpha D$

d'où $v_0^2 = (2g \sin\alpha + 2fg \cos\alpha) D$ } d'où $D = \left(\frac{v_0}{v_0'}\right)^2 D'$
 de même $v_0'^2 = (2g \sin\alpha + 2fg \cos\alpha) D'$ }

\rightarrow Cl: Le résultat est identique que la route soit horizontale ou pas!