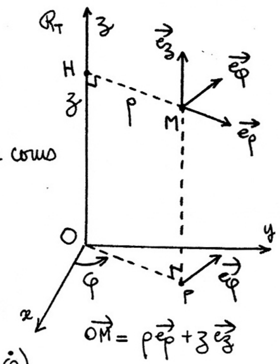
CORRECTION DL n°3



{M, m} étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen et dans la base cylindrique $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

Rque : ATTENTION, ce problème impose des notations différentes de celles du cours mais c'est bien dans la base cylindrique qu'on travaille

1a) b) $\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} \dot\rho \\ \rho\dot\varphi \\ \dot z \end{vmatrix}$ $\quad \vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \\ \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi \\ \ddot z \end{vmatrix}$ dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

avec $\boxed{a_\varphi \equiv \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho^2\dot\varphi}{dt}}$ car $\dfrac{d\rho^2\dot\varphi}{dt} = \rho(\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)$.

c) le PFD appliqué à M dans R_T :

$m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \underbrace{\vec{R}}_{\text{dans le plan (OHMP)}}$ soit $m\begin{vmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_\rho \\ 0 \\ R_z \end{vmatrix}$ soit $m a_\varphi = 0$

d'où $\boxed{\rho^2\dot\varphi = cte = C}$

2a) $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)}$

b) $\vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ / $\delta W(\vec{R}) = \vec{R}\cdot d\vec{OM} = 0$ car aucun frottement
$\delta W(\vec{P}) = -dE_{p_g}$ $\Big\}$ $\delta W(\vec{F}_{ext}) = -dE_{p_g}$

donc les forces extérieures dérivent d'une énergie potentielle $E_p = mgz + \cancel{cte}$ avec $E_p(0) = 0$ (Oz ascendant)

Par ailleurs M est sur un paraboloïde / $\rho^2 - az = 0$ → $\boxed{E_p = mgz = \frac{mg}{a}\rho^2}$

c) Théorème de l'E_m : $dE_m = \delta W_{NC} = \delta W(\vec{R}) = 0$

→ $\boxed{E_m = cte}$ $\quad$ $\boxed{E_m \text{ est constante pour un système conservatif}}$

3a) $E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{mg}{a}\rho^2$

avec $\rho^2\dot\varphi = C = cte$ et $z = \dfrac{\rho^2}{a}$ soit $\dot z = \dfrac{2\rho\dot\rho}{a}$ ce qui permet d'écrire E_m en fonction de ρ et de $\dot\rho$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot\rho^2\underbrace{\left(1 + 4\frac{\rho^2}{a^2}\right)}_{G(\rho)} + \underbrace{\frac{mg}{a}\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{\rho^2}}_{E_{p,ef}(\rho)}$$

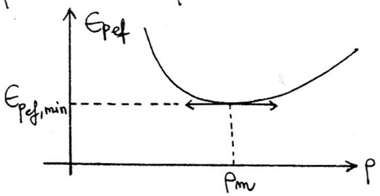
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot\rho^2\, G(\rho) + E_{p,ef}(\rho) \quad (*)$$

b) Si $\rho \to 0$ (ρ "faible") alors $E_{pef}(\rho) \simeq \frac{1}{2}\frac{mC^2}{\rho^2} \to +\infty$ si $\rho \to 0$

Si $\rho \to \infty$ (ρ "élevé") alors $E_{pef}(\rho) \simeq \frac{mg}{a}\rho^2 \to +\infty$ si $\rho \to +\infty$

Si $\rho = \rho_m$ alors $\left(\dfrac{dE_{p,ef}}{d\rho}\right)_{\rho_m} = \dfrac{2mg}{a}\rho_m - \dfrac{mC^2}{\rho_m^3} = 0$

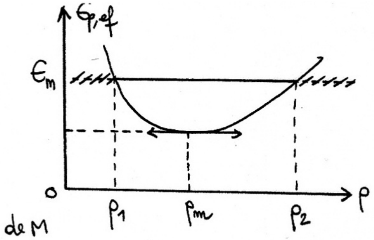
Soit $\boxed{\rho_m = \left(\dfrac{aC^2}{2g}\right)^{\frac{1}{4}}}$ (**)



c) On a $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 G(\rho) + E_{pef}(\rho) \geqslant E_{p,ef}(\rho)}$

Donc, puisque $E_m = cte = E_0$ il faut $E_{p,ef}(\rho) \leqslant E_0$

Ce qui impose $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$



avec ρ_1 et ρ_2 les distances minimale et maximale de M par rapport à l'axe Oz et qui sont solutions de l'équation $E_{pef}(\rho) = E_m$

Soit lorsque $\begin{vmatrix} E_k = 0 \\ \dot\rho = 0 \end{vmatrix}$, soit ρ_1 et ρ_2 solution de $\boxed{\dfrac{mg}{a}\rho^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{mC^2}{\rho^2} = E_0}$

4°) On a déplacé M un tout petit peu autour de sa position d'équilibre : $\rho = \rho_m + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \rho_m$.
Alors, en exprimant $E_{pef}(\rho)$ en fonction de $E_{p,ef}(\rho_m)$ par un développement au 2^d ordre en ε :

$$E_{p,ef}(\rho) \cong E_{p,ef}(\rho_m) + \underbrace{\left(\frac{dE_{p,ef}}{d\rho}\right)_{\rho_m}}_{\equiv 0}(\rho - \rho_m) + \left(\frac{d^2E_{p,ef}}{d\rho^2}\right)_{\rho_m}\frac{(\rho-\rho_m)^2}{2} + \dots$$

Or, grâce à (*) on peut exprimer $\left(\dfrac{d^2E_{p,ef}}{d\rho^2}\right)_{\rho_m} = \dfrac{2mg}{a} + \dfrac{6mC^2}{\rho_m^4} \overset{(**)}{=} \dfrac{8mg}{a}$

d'où $E_{p,ef}(\rho) \cong E_{p,ef}(\rho_m) + \dfrac{4mg}{a}\varepsilon^2$

Par ailleurs, comme $\dot\rho = \dot\varepsilon$, on peut exprimer E_m en se limitant aux termes d'ordre 2 en ε et $\dot\varepsilon$

→ $E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot\varepsilon^2\left(1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2}\right) + E_{p,ef}(\rho_m) + \frac{4mg}{a}\varepsilon^2 = cte$

$\frac{d}{dt}$ ↓

$0 = \frac{1}{\cancel{2}}m\,\cancel{2}\ddot\varepsilon\cancel{\dot\varepsilon}\left(1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2}\right) + 0 + \frac{4mg}{a}2\cancel{\dot\varepsilon}\varepsilon$ ($\dot\varepsilon \neq 0$ car on étudie le mouvement)

Soit : $\ddot\varepsilon + \dfrac{8g}{a}\dfrac{1}{1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2}}\varepsilon = 0$

Qu'on peut écrire :

$\boxed{\ddot\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon = 0}$ qui admet une solution sinusoïdale : $\varepsilon(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Cl : M a un mouvement oscillatoire autour de ρ_m de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{8g}{a\left(1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2}\right)}}}$ et de période : $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{8g}\left(1 + \dfrac{4\rho_m^2}{a^2}\right)}}$