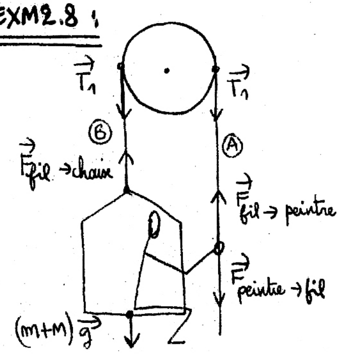
EXM2.8 :



1) Système {chaise + peintre} soumis à son poids, à l'action du fil sur la chaise et à l'act° du fil sur le peintre

avec

$$F_{p \to f} \underset{\text{act}^\circ/\text{réaction}}{=} F_{f \to p} \overset{\text{Ⓐ fil tendu parfait}}{=} T_1 \underset{\text{Ⓑ fil tendu parfait}}{=} F_{f \to chaise} \overset{\text{tension en tout pt du fil}}{=} T$$

d'où $F_{fil \to chaise} + F_{fil \to peintre} = 2T$

on applique le PFD sur le système {peintre ; chaise} et on projette selon l'axe ascendant

$$(m+M)\,a = -(m+M)\,g + 2T$$

d'où l'accélération du peintre et de la chaise $\boxed{a = -g + \frac{2T}{m+M}}$

AN : $m = 15$ kg, $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$, $M = 90$ kg, $T = F_{p \to fil} = 680$ N

$a = 3{,}15\ \text{m.s}^{-2}$

Rque : on vérifie que $a = \ddot{z} > 0$ donc que le peintre et la chaise s'élève.

2) On s'intéresse maintenant au système {chaise} soumis :

à son poids $\vec{P}' = m\vec{g}$

à l'act° du fil $\vec{F}_{fil \to chaise} = -\vec{T_1}$ (cf 1))

à l'action du peintre $\vec{F}_{peintre \to chaise}$ inconnue ; mais pour pas longtemps car on connait (cf 1)) l'accélération de la chaise :

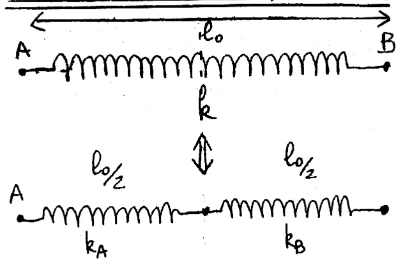
PFD → $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{fil \to chaise} + \vec{F}_{peintre \to chaise}$

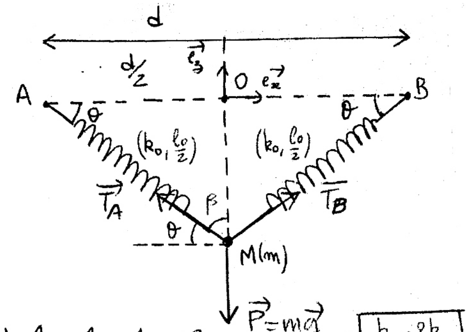
en projection selon $\vec{e_3}$: $ma = -mg + T + \underset{\text{algébrique}}{F}$

d'où $\boxed{F = m(a+g) - T}$ ⇒ AN $F = 15(3{,}15 + 9{,}8) - 680 \simeq -486$ N

Rque : $F < 0$ cette force est dirigée vers le bas, ce qui est logique : le poids du peintre s'opposant à l'élévation de la chaise. Mais la chaise ne subit pas l'intégralité de ce poids (parce que le peintre tire sur la corde) : ainsi le peintre exerce sur la chaise une force équivalente au poids d'une masse de 48,6 kg environ.

EXM2.11 : Fil élastique lesté :





par symétrie puisque $\frac{l_0}{2} = \frac{l_0}{2}$ on a $k_A = k_B = k_0$ et $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} = \frac{2}{k_0}$ → $\boxed{k_0 = 2k}$

$$T_A = T_B = k_0 \left| l - \frac{l_0}{2} \right| = k_0 \left| \frac{d}{2\cos\theta} - \frac{l_0}{2} \right|$$ (valeur absolue car par déf $T > 0$)

PFD appliqué en {M} qui est en équilibre : $\vec{0} = \vec{T_A} + \vec{T_B} + \vec{P}$ qu'on projette selon

$\vec{e_3}$: $2T_A \sin\theta - mg = 0$ (1)

$\vec{e_x}$: $-T_A\cos\theta + T_B\cos\theta = 0$ (2) on retrouve $T_A = T_B$

(1) → $T_A = \frac{mg}{2\sin\theta}$ d'où $\frac{mg}{2\sin\theta} = k_0\left|\frac{d}{2\cos\theta} - \frac{l_0}{2}\right| = k\left|\frac{d}{\cos\theta} - l_0\right|$

(2) $\boxed{\frac{mg}{2k} = \left| d\tan\theta - l_0\sin\theta \right|}$

Si m est une masse légère : le "ressort"/fil est peu lesté et donc θ petit → $\tan\theta \sim \theta$ et $\sin\theta \sim \theta$

→ $\boxed{(1)\ \theta \simeq \frac{mg}{2k|d - l_0|}}$ $= 0{,}49$ rad $= 28°$ qui n'est pas "petit"

→ avec les Données de l'énoncé on n'est pas ds le cas (1) il faut résoudre numériquement (2).

Alors on trouve $\theta = 0{,}79$ rad

On aurait tout aussi bien pu caractériser l'équilibre avec l'angle β (celui proposé ds l'énoncé)

Solution DM 3

• 1) Pour ce problème, l'emploi de coordonnées polaires s'impose. Les forces subies par M sont son poids $\mathbf{P}$ et l'action de contact $\mathbf{N} = -N\mathbf{u}_r$ ($N > 0$). La loi de la dynamique fournit l'équation vectorielle :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{N}. \qquad (II.1)$$

Compte tenu des expressions de $\mathbf{a}$ pour un mouvement circulaire (§ 4.5), les projections radiale et orthoradiale de (II.1) s'écrivent :

$$mg\cos\theta - N = -ma\dot{\theta}^2 \qquad (II.2)$$

$$-mg\sin\theta = ma\ddot{\theta} \qquad (II.3)$$

(II.3) fournit l'équation demandée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \qquad (E)$$

en posant :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{a}. \qquad (II.4)$$

Pour $\theta \ll 1$, la linéarisation de (E) conduit à des solutions sinusoïdales de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \qquad (II.5)$$

On reconnaît l'expression de la période propre d'un *pendule simple*, résultat évident puisque la force exercée par un fil conduit à une équation identique à (II.1); on reconnaît dans E l'*équation du pendule* sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir.

• 2) On est conduit à :

$$\frac{\omega^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta = A \qquad (II.5)$$

la constante étant déterminée par $\omega = 0$ pour $\theta = \pi$, d'où $A = \omega_0^2$ et :

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(1+\cos\theta) = \frac{2g}{a}(1+\cos\theta). \qquad (II.6)$$

En reportant dans (II.2), on obtient :

$$N = mg(3\cos\theta + 2) \qquad (II.7)$$

N reste positif, ce qui assure le contact, jusqu'à :

$$\cos\theta_0 = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \theta_0 = 131,8°. \qquad (II.8)$$

Le mouvement ultérieur est un mouvement *balistique* (sous l'action du poids seul) et donc de trajectoire parabolique (V. l'exercice résolu précédent), tangente à (S).

• 3) La projection de la loi de la dynamique donne cette fois :

$$-mg\cos\theta + N = -ma\dot{\theta}^2 \qquad (II.9)$$

$$mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}. \qquad (II.10)$$

Pour $\theta \ll 1$, on peut tenter la linéarisation de (II.10) :

$$\ddot{\theta} = \omega_0^2\theta \qquad (II.11)$$

équation dont la solution peut se chercher sous la forme : [18]

$$\theta = A\exp\omega_0 t + B\exp -\omega_0 t. \qquad (II.12)$$

On obtient $A = B$ en exprimant $\dot{\theta}_0 = 0$ et enfin $A = B = \alpha/2$ en explicitant $\theta_0 = \alpha$. On constate que θ ne peut pas rester petit, situation qui correspond au fait que, S étant renversée, O est devenue une *position d'équilibre instable*. Il convient de noter que (II.12) décrit une fonction $\theta(t)$ rapidement croissante et donc un angle qui est rapidement non petit, de telle sorte que la linéarisation qui a été utilisée pour établir (II.12) cesse d'être valable.

• 4) On intègre E' en :

$$\frac{\omega^2}{2} + \omega_0^2\cos\theta = A = \omega_0^2 \qquad (II.13)$$

d'où :

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(1-\cos\theta) = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta) \qquad (II.14)$$

et, en reportant dans (II.9) :

$$N = mg(3\cos\theta - 2) \qquad (II.15)$$

N reste positif jusqu'à :

$$\cos\theta_0' = \frac{2}{3} \quad ; \quad \theta_0' = 48,2°. \qquad (II.8)$$

[18] Si on connaît ces fonctions, il est plus habile de chercher θ sous la forme d'une combinaison de *lignes hyperboliques* :

$$\theta = C\,\text{ch}\,\omega_0 t + D\,\text{sh}\,\omega_0 t.$$