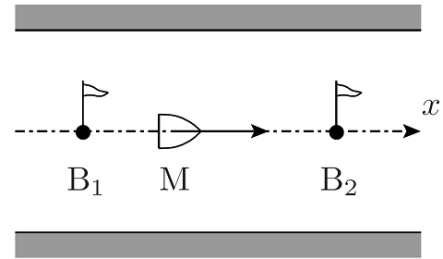


■ Changement de référentiels : aspect cinématique

Ex-M8.1 Aller-retour sur un fleuve

Deux bouées B_1 et B_2 , distantes de l , sont situées sur un canal, dont le courant a pour vitesse uniforme \vec{u} par rapport aux berges et s'écoule de B_1 vers B_2 . Ces bouées sont fixes par rapport aux berges. Un rameur, assimilé à un point matériel M , effectue un aller-retour entre les deux bouées, sa vitesse par rapport au courant (à l'eau) gardant toujours la même norme égale à v telle que $v > u$.



1) Exprimer les vitesses \vec{v}_+ et \vec{v}_- du rameur par rapport aux berges, respectivement au cours des trajets B_1 vers B_2 et B_2 vers B_1 .

2) En déduire la durée τ de l'aller-retour du rameur entre les bouées.

3) Quelle est la durée τ' mise par un personne marchant sur les berges avec la même vitesse v que celle du rameur par rapport au courant, et qui effectue le même aller-retour entre les bouées? Comparer les durées τ et τ' (on pourra faire le rapport).

Rép : 1) $\vec{v}_+ = (u + v)\vec{e}_x$; $\vec{v}_- = (u - v)\vec{e}_x$ 2) $\tau = \frac{2lv}{v^2 - u^2}$; 3) $\tau' = \frac{2l}{v} < \tau$

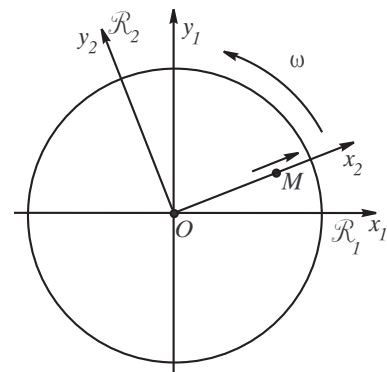
Ex-M8.2 Traversée d'une rivière

Un nageur dont la vitesse par rapport à l'eau est v_1 traverse une rivière de largeur l en suivant une trajectoire perpendiculaire aux berges. Sachant que le courant a une vitesse v_0 uniforme, calculer le temps de la traversée.

Rép : Avant tout calcul, un schéma et la bonne compréhension des référentiels mis en jeu sont ici obligatoires. $\tau = \frac{l}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}$

Ex-M8.3 Mouvement radial sur un plateau tournant

Soit le plateau horizontal d'un four micro-onde avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe. \mathcal{R}_1 est le référentiel terrestre et \mathcal{R}_2 est lié au plateau.



Supposons qu'une fourmi M , égarée (...), survive suffisamment pour décrire à vitesse constante $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_2}}$ l'axe (Ox_2) lié à \mathcal{R}_2 .

→ Exprimer $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}}$ et $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}}$ dans la base $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2})$.

Rép : $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}} = v\vec{e}_{x_2} + x_2\omega\vec{e}_{y_2}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}} = -x_2\omega^2\vec{e}_{x_2} + (2\omega v + x_2\dot{\omega})\vec{e}_{y_2}$

Ex-M8.4 Manège d'enfants

Un manège d'enfants tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$. Le propriétaire parcourt la plate-forme (référentiel \mathcal{R}' de repère cartésien $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$) pour ramasser les tickets.

Partant du centre au temps $t = 0$ sans vitesse, il suit un rayon de la plate-forme (qui porte le vecteur \vec{e}'_x) avec un mouvement uniformément accéléré.

1) Établir les équations paramétriques de la trajectoire de l'homme :

1.a) Dans le référentiel \mathcal{R}' lié au manège ($\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)$).

1.b) Dans le référentiel \mathcal{R} lié au sol en utilisant les coordonnées polaire ($r = \dots$ et $\theta = \dots$), en supposant $\theta(t = 0) = 0$.

2) Déterminer la vitesse absolue du mouvement de l'homme dans une base judicieusement choisie de \mathcal{R} :

2.a) en utilisant les lois de composition des mouvements.

2.b) à partir de l'équation paramétrique de la trajectoire.

3) Reprendre la question 2) pour l'accélération absolue.

Rép : 1.a) $\vec{OM} = \frac{1}{2}at \vec{e}_x'$; 1.b) $r = \frac{1}{2}at$; $\theta = \omega t$; 2) $\vec{v}_a = at\vec{e}_x' + \frac{1}{2}a\omega t^2\vec{e}_y'$; 3) $\vec{a}_a = (a - \frac{1}{2}a\omega^2 t^2)\vec{e}_x' + 2a\omega t\vec{e}_y'$

Ex-M8.5 Vitesse en coordonnées cylindriques

1) Quelle est la vitesse d'un point exprimée dans la base locale des coordonnées sphériques ?

2) Quel est le vecteur rotation du repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ par rapport au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$?

En déduire une autre méthode de calcul de la vitesse précédente en utilisant les changements de référentiels.

Rép : → Cf Cours M8.II.2.c), p. 4.

M9

■ Dynamique en référentiel non galiléen

Ex-M9.1 Anneau coulissant sur un cercle en rotation (*, → à voir !)

Une circonférence de centre O et de rayon R située dans un plan vertical tourne autour d'un de ses diamètres d'un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire ω .

Un anneau M de masse m assimilable à un point matériel est mobile sans frottement sur cette circonférence.

On désigne par θ l'angle que fait OM avec la verticale ascendante.

I - Trouver l'équation du mouvement de M dans \mathcal{R} référentiel tournant lié à la circonférence :

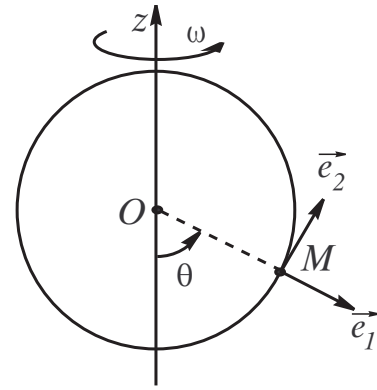
1) à partir de la relation fondamentale de la dynamique ;

2) à partir du théorème du moment cinétique ;

3) à partir de la puissance cinétique ;

4) à partir de la conservation de l'énergie mécanique (qui sera justifiée).

Vérifier qu'on obtient la même équation du mouvement avec les différentes méthodes.



II - On veut étudier l'équilibre relatif de M .

1) Écrire la relation $f(\theta) = 0$ donnant les positions d'équilibre dans \mathcal{R} .

2) Déterminer les positions d'équilibre.

3) Étudier la stabilité des différentes positions.

III - On veut que l'équilibre stable corresponde à 30° .

Quelle devra être la vitesse angulaire si $R = 0,2 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$? Calculer la période des petits mouvements autour de cette position.

IV - Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle (dans Rréférentiel lié à la circonférence).

En déduire la nature du mouvement possible (oscillations ou révolutions) suivant la valeur de l'énergie mécanique du point matériel.

Rép : I) $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$

II.1) Il s'agit, bien entendu, de la condition d'équilibre pour ce système conservatif : $\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}\right)_{(\theta_{\text{eq}})} = 0$

$\Leftrightarrow \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) = 0$ puisque $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,g} + \mathcal{E}_{p,ie} = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta$; II.2)

$\theta_{\text{eq1}} = 0, \theta_{\text{eq2}} = \pi$ et deux autres possibilités, dans le seul cas où $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$: $\theta_{\text{eq3}} = \arccos \frac{g}{R\omega^2}$

et $\theta_{\text{eq4}} = -\theta_{\text{eq3}}$; II.3) Déterminer le signe de $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}\right)_{(\theta_{\text{eq}})}$. En déduire le caractère instable ou stable de chaque position d'équilibre.

III) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R\sqrt{3}}} \simeq 7,6 \text{ rad.s}^{-1}$. Puisqu'on se place dans la situation où $\theta_{\text{eq}} = \theta_{\text{eq3}}$ est un équilibre stable, un petit écart φ depuis cette position d'équilibre va être régi par une équation de la forme $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ avec $\omega_0 = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi}{T_0}$, d'où $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2R\sqrt{3}}{g}} \simeq 1,65 \text{ s}$.

Ex-M9.2 Une tige horizontale AB de longueur l est solidaire d'un axe vertical (Δ) qui tourne avec la vitesse angulaire ω constante. Un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel peut glisser sans frottements sur la tige AB . Il est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige (à une date prise comme origine des temps) en I milieu de AB .

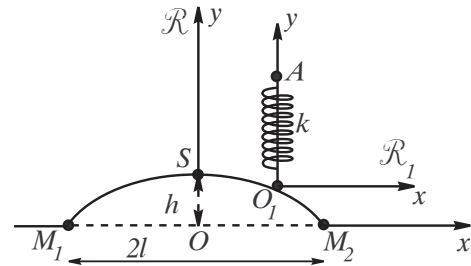
- 1) Étudier le mouvement de M dans le référentiel du système tournant.
- 2) À quelle date et avec quelle vitesse arrive-t-il à l'extrémité de la tige ?
- 3) Donner l'expression de la réaction de la tige sur l'anneau au point B juste avant la chute.

Rép : 1) en appelant (Ox') la direction de la tige : $OM = x' = \frac{l}{2} \text{ch} \omega t$; 2) $t_1 = \frac{1}{\omega} \text{arcch} 2$; $v_B = \frac{l\omega}{2} \sqrt{3}$; 3) $R_{(M=B)} = m\sqrt{g^2 + 3l^2\omega^4}$.

Ex-M9.3 Mouvement d'un point matériel dans un véhicule accéléré (*)

Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse \vec{v} sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$.

On lui associe un référentiel $\mathcal{R}_1 (O_1xyz, t)$ en translation par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}(Oxyz, t)$. Un point matériel A , de masse m , lié à l'origine O_1 par un ressort de raideur k , de longueur naturelle l_0 , évolue le long de l'axe (O_1y) .



1) Montrer que la composante cartésienne, suivant la verticale ascendante (Oy) , de l'accélération de O_1 dans \mathcal{R} s'écrit $\frac{v^2 f''}{(f'^2 + 1)^2}$, f' et f'' désignant les dérivées première et seconde de f par rapport à x .

2) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement de A dans \mathcal{R}_1 .

3) Calculer la tension \vec{T} du ressort dans le cas où, grâce à une force supplémentaire de frottement visqueux, A acquiert rapidement une position d'équilibre dans \mathcal{R}_1 . Comparer alors \vec{T} au poids, dans les cas où la route forme une bosse ou un creux. Conclure, en utilisant la notion de poids apparent.

4) Le profil de la route forme une bosse assimilable à un arc de parabole, M_1SM_2 , dont les caractéristiques sont données sur la figure ci-jointe. Pour quelle valeur de la vitesse y-a-t-il impesanteur pour A en S ?

Rép : 1) $v_{O_1/\mathcal{R}_T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ avec $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = f' \dot{x} \rightarrow \dots \rightarrow \ddot{y} = \frac{v^2 f''}{(1 + f'^2)^2}$; 2) $m \vec{a}_{A/\mathcal{R}_1} = \vec{F}_{\text{élas}} + m \vec{g} - m \vec{a}_e(M)$; 3) $T = mg + \frac{mv^2 f''}{(1 + f'^2)^2}$; 4) $v = l \sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Ex-M9.4 Pendule 'simple'

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m , placé à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur l (et de masse négligeable). L'autre extrémité du fil est fixée en O' .

O' oscille sinusoidalement suivant la verticale, avec une amplitude D_m et une pulsation ω :

$$\vec{OO'} = D_m \cos \omega t \vec{e}_x$$

On désigne par θ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante (Ox) , de vecteur unitaire \vec{e}_x . On suppose qu'il n'y a pas de frottements. On note $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le repère associé au référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le repère lié au support du pendule.

1) \mathcal{R}' est-il galiléen ?

2) Écrire l'expression du théorème du moment cinétique en O' .

3) En déduire que l'équation différentielle du mouvement de M dans \mathcal{R}' s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t)) \sin \theta = 0$ où $h(t)$ est une fonction du temps à préciser.

Rép : 3) $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left(1 + \frac{D_m \omega^2}{g} \cos \omega t\right) \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t)) \sin \theta.$

Ex-M9.5 Anneau sur une tige en rotation autour d'un axe fixe

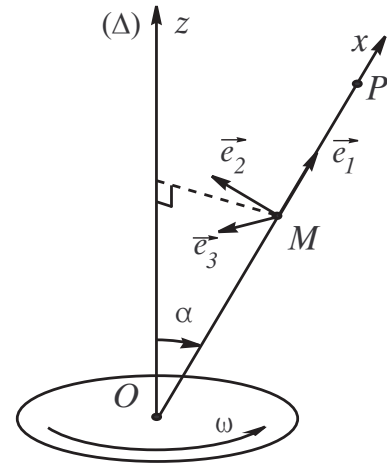
Une tige OP de longueur l est fixée au point O à un axe vertical (Δ) avec lequel elle fait un angle α constant. Un petit anneau de masse m considéré comme ponctuel peut se déplacer sans frottement sur la tige OP . Soit M sa position définie par $OM = x$.

L'ensemble est en rotation uniforme autour de l'axe (Δ) à la vitesse angulaire ω .

1) Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre x_e de l'anneau sur la tige OP que si la vitesse angulaire de rotation est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.

2) Préciser la position de l'anneau pour une vitesse $\omega_1 \geq \omega_0$.

3) Si l'on écarte légèrement l'anneau de cette position lorsqu'elle existe, que se passe-t-il? Étudier la stabilité de l'équilibre.



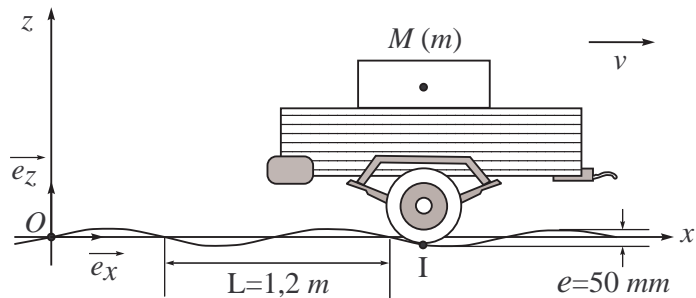
Rép : 1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{l \sin^2 \alpha}}$; 2) $x_1 = \frac{g \cos \alpha}{\omega_1^2 \sin^2 \alpha}$; 3) **P.F.D.** dans le référentiel \mathcal{R}' lié à la tige en projection selon $Ox : \ddot{x} - \omega_1^2 \sin \alpha x = -g \cos \alpha$, de solution $x(t) = x_P + x_G = x_1 + A \exp(-\lambda t) + B \exp(\lambda t)$ avec $\lambda = \sqrt{\omega^2 \sin \alpha}$. Comme $x(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \nearrow$, l'équilibre est instable.

Ex-M9.6 Une remorque sur une route bosselée

On suppose le référentiel lié au sol terrestre galiléen. On étudie un objet M de masse m posé sur le plateau d'une remorque. La remorque se déplace à une vitesse horizontale $v = cste$ sur une route de profil sinusoidal.

On suppose les amortisseurs et les pneus de la remorque infiniment rigides.

→ Déterminer la vitesse v à partir de laquelle l'objet ne reste plus tout le temps en contact avec le plateau de la remorque.



Méthode et indications pour résoudre ce problème :

- faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur $S = \{M, m\}$ dans le référentiel \mathcal{R}_1 lié à la remorque

- en particulier, montrer que $\vec{F}_{ie}(M) = -m\ddot{z}_I \vec{e}_z$, avec z_I , l'altitude de I , point géométrique lié à \mathcal{R}_1 qui coïncide avec le point de la remorque en contact avec le sol

- exprimer $z_I(t)$ en fonction de e , x et L ; en déduire que $\ddot{z}_I = -\left(\frac{2\pi v}{L}\right)^2 z_I(t)$

- exprimer le **P.F.D.** pour M dans \mathcal{R}_1 et en déduire l'expression de la réaction de la remorque sur M en fonction de m , g et \ddot{z}_I

- quelle est la condition sur R qui traduit le contact de M avec la remorque?

- en déduire qu'il y a décollement dès que $\ddot{z}_{I,\min} < -g$; en déduire v .

Rép : $v = \sqrt{\frac{g}{2e} \cdot \frac{L}{\pi}}$

Ex-M9.7 Bille et astéroïde

À l'aide du théorème de Gauss, on montre que le champ de gravitation en un point intérieur M d'un astéroïde sphérique homogène, de masse volumique ρ a pour expression :

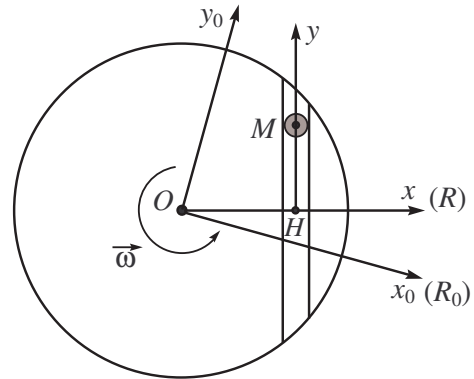
$$\vec{G}(M) = -\frac{4}{3}\pi \cdot \rho \cdot \overrightarrow{OM}$$

Un tel astéroïde est assujéti à tourner autour d'un de ses diamètres avec la vitesse angulaire ω constante.

Une cavité cylindrique de petite dimension et qui ne perturbe pas la gravitation est creusée dans le plan équatorial (par rapport à l'axe de rotation) à distance $OH = a$ du centre O .

On abandonne à l'une de ses extrémités un objet M quasiment ponctuel de masse m qui peut glisser sans frottement dans cette cavité.

Données : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ u.S.I.}; \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.



1) Donner la nature du mouvement de l'objet sachant que la période de révolution de l'astéroïde sur lui-même est $T = 10 \text{ h}$.

2) Calculer la période T_0 du mouvement de la masse dans la cavité.

3) Quelle devrait être la masse volumique ρ de l'astéroïde pour que l'objet placé à l'entrée de la cavité y reste en équilibre, la période de rotation T n'ayant pas changé.

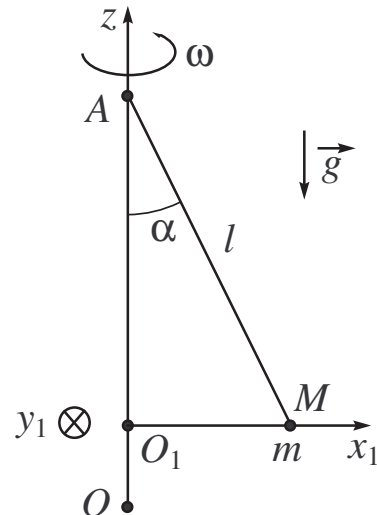
Ex-M9.8 Pendule conique

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y, z, t)$ supposé galiléen, un pendule conique est constitué d'une masse ponctuelle m fixée à un fil de masse négligeable et de longueur l dont l'extrémité supérieure A est fixe et située sur l'axe vertical (Oz) .

Le pendule est astreint à tourner autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω : le fil est alors incliné d'un angle α constant par rapport à (Oz) .

On note M la position de m à la date t .

Soit \mathcal{R}_1 le référentiel (O_1, x_1, y_1, z, t) lié au pendule tel que M soit toujours sur l'axe (O_1x_1) . L'étude sera menée dans ce référentiel.



1) Exprimer les forces d'inertie \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{iC} dans la base $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_z)$.

2) Montrer que l'inclinaison du pendule n'est observée que si ω est supérieure à une certaine valeur ω_{\min} que l'on déterminera en fonction de g et l .

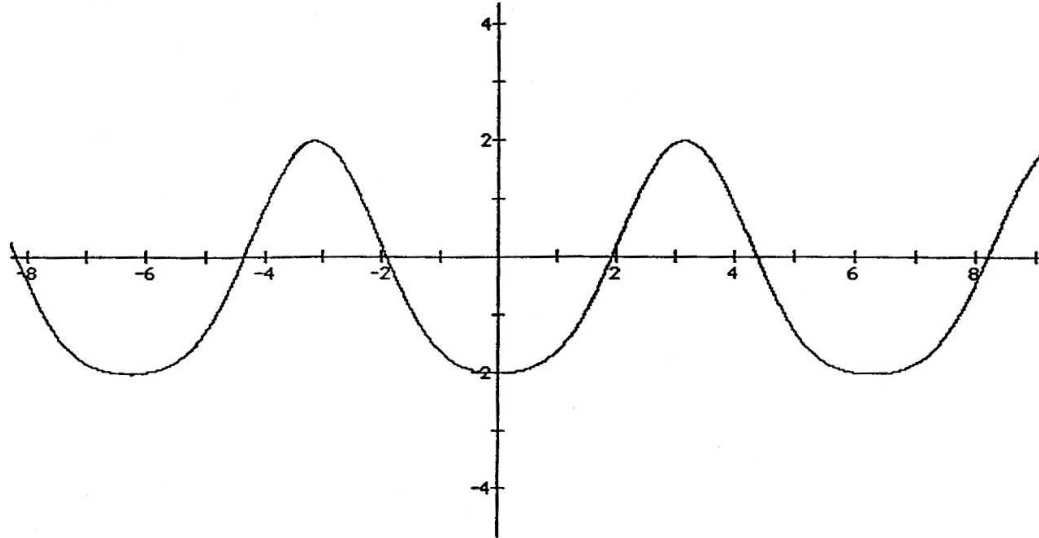
Dans le cas où $\omega > \omega_{\min}$, déterminer l'expression de α en fonction de g , l et ω .

3) Quelle serait la nouvelle expression α' de l'angle si ce pendule était situé dans un ascenseur en mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_z$, par rapport à \mathcal{R} ($a > 0$) ?

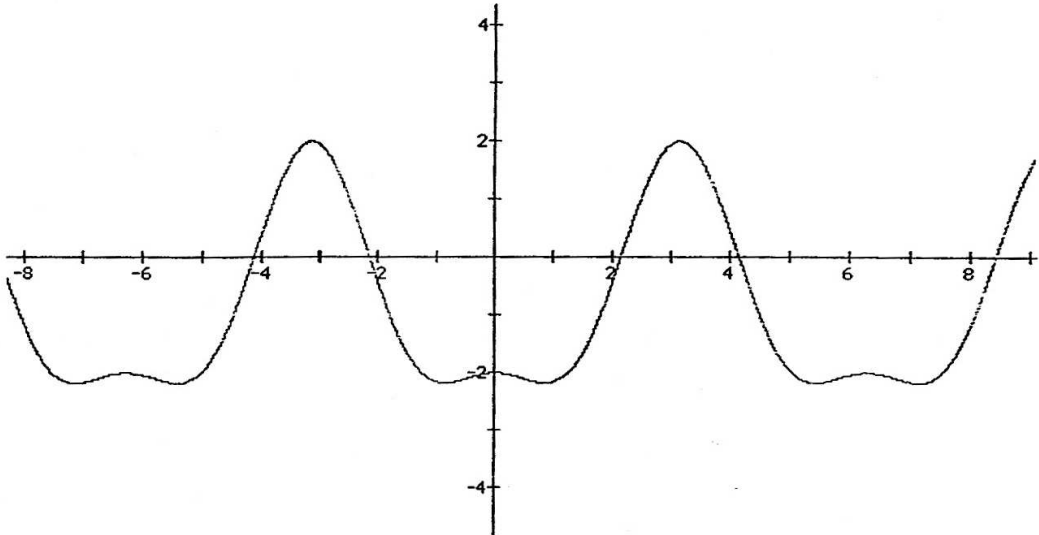
Complément Ex-M9.1

Profils d'énergie potentielle

$\omega = 3,8 \text{ rad.s}^{-1}$



$\omega = 7,6 \text{ rad.s}^{-1}$



$\omega = 15,2 \text{ rad.s}^{-1}$

