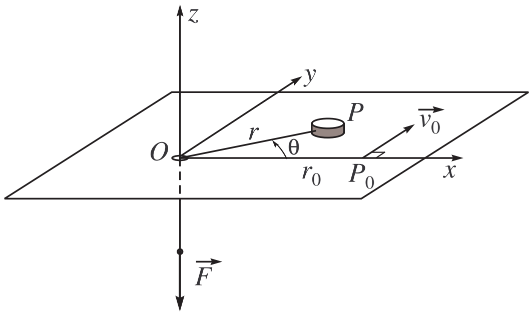
■ Forces centrales conservatives

Ex-M7.1 **Point matériel tiré par une corde (*)**

Un palet P de masse M glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) percé d'un trou à l'origine O.
Sa position est repérée par les coordonnées polaires r et θ, d'axe (Oz).
L'expérimentateur lance le palet, à la distance r_0 du point O, avec une vitesse initiale orthoradiale $\overrightarrow{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{e}_{\theta(t=0)}$ (on prendra $\theta(t=0)=0$), et tire sur le fil de façon à rapprocher régulièrement le palet du point O : $r(t) = r_0 - Vt$.



On admet que la force exercée par le fil (qui reste toujours tendu) sur P est $\overrightarrow{T} = -F\overrightarrow{e_r}$.

1) Montrer que la vitesse angulaire du palet s'écrit $\omega = \dot\theta = \dfrac{r_0 v_0}{(r_0 - Vt)^2}$. En déduire l'évolution de la force $\overrightarrow{F}$ qu'il faut exercer pour réaliser cet objectif. Commenter.

2) Calculer directement le travail de traction fourni par cet opérateur s'il fait passer la distance du mobile à l'axe de la valeur r_0 à la valeur r_1. Retrouver ce résultat par une méthode énergétique.

Rép : 1) $F = \dfrac{Mr_0^2v_0^2}{(r_0-Vt)^3}$; dont $\overrightarrow{T} = -\dfrac{MC^2}{r^3}\overrightarrow{e_r} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}$ avec $\mathcal{E}_p = -\dfrac{MC^2}{2r^2} + \cancel{\mathsf{Cte}}$ (avec $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$ et $C = r_0v_0$ la constante des aires) ; **2)** $W_{0\to1}(\overrightarrow{F}) = \dfrac{Mr_0^2v_0^2}{2}\left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{r_0^2}\right)$

Ex-M7.2 **Force centrale en $1/r^3$ (**, à chercher après avoir travaillé le reste)**

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à une force d'expression $\overrightarrow{F} = -\dfrac{a}{r^3}\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques de centre O, a étant une constante positive. À l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\,\overrightarrow{e_x}$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y})$.

1) Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.

2) Montrer que la force $\overrightarrow{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ dont elle dérive (on prendre $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$)). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ compte tenu des conditions initiales.

3) r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion.

4) La particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

a) Établir que $\dot r = \dfrac{r_0v_0}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$. En déduire que $\boxed{\dot r = -r_0v_0u'_\theta}$ avec $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$ et $u'_\theta = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.

b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique en fonction de la variable u et de u'_θ.

En déduire que u vérifie l'équation : $\boxed{u''_\theta + \eta^2 u = 0}$ avec $\boxed{\eta = \sqrt{1 - \dfrac{a}{mr_0^2v_0^2}}}$.

c) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.

d) Donner l'allure de la trajectoire pour $\eta = 0,1$, $\theta_0 = 0$ et $r_0 = 1\ m$.

Solution Ex-M7.2

1) La force est centrale de centre de force O. Le **T.M.C.** pour M évalué en O dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{\mathsf{Cte}}$, d'expression :

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \begin{cases} \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M_0) & = r_0\,\overrightarrow{e_x}\times mv_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y}) & = mr_0v_0\sin\alpha\,\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} & = r\overrightarrow{e_r}\times(\dot r\,\overrightarrow{e_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) & = mr^2\dot\theta\,vez = mC\,\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

avec $\boxed{C = r^2\dot\theta = r_0v_0\sin\alpha}$, la **constante des aires**.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à tout instant à $\overrightarrow{L_O}$, donc à $\overrightarrow{e_z}$, direction fixe de l'espace : **la trajectoire est donc plane**, contenue dans le plan $(Oxy)\perp\overrightarrow{e_z}$.

2) Lors d'un déplacement élémentaire de M, le travail de la force $\overrightarrow{F}$ est : $\delta W = -\frac{a}{r^3}\, ver.(\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}) = -\frac{a}{r^3}\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, avec $\mathcal{E}_p = -\frac{a}{2r^2}$ (en choisissant l'énergie potentielle nulle à l'infini).

Thm$\mathcal{E}_m$: $\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0$, soit $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte}}$: **le système est conservatif**.

Le système $\{M, m\}$ a pour énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2_{M/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\mathcal{E}_{k,r}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}_{\mathcal{E}_{p,\mathsf{eff}}(r)}$$

D'où $\boxed{\mathcal{E}_{p,\mathsf{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \frac{mr_0^2v_0^2\sin^2\alpha - a}{2r^2}}$

3) L'énergie potentielle s'annule à l'infini. Le système est donc dans un **état de diffusion** si son énergie mécanique est positive, ce qui se traduit par :

$$\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte} = \mathcal{E}_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{a}{2r_0^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{v_0 > \sqrt{\frac{a}{mr_0^2}}}$$

4.a) Comme la constante des aires s'écrit : $C = \frac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta} = r_0v_0\sin\alpha = r_0v_0$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{on a : } \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dfrac{r_0v_0}{r^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) \\ \text{Comme } u'_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}, \text{on a : } \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r^2u'_\theta \end{array}\right\} \text{Soit : } \boxed{\dot{r} = -r_0v_0u'_\theta}$$

Alors $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{k,r} + \mathcal{E}_{p,\mathsf{eff}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mr_0^2v_0^2 - a}{2r^2} = \frac{1}{2}mr_0^2v_0^2(u'_\theta)^2 + \frac{mr_0^2v_0^2 - a}{2}u^2$

4.b) Puisque $\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte} \xrightarrow[\text{par rapport à } \theta]{\text{en dérivant}} 0 = mr_0^2v_0^2u''_\theta.u'_\theta + (mr_0^2v_0^2 - a)u.u'_\theta$

Comme le cas $u'_\theta = 0$ ne nous intéresse pas (on étudie le mouvement de M), on obtient :

$$u''_\theta + \left(1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2}\right)u = 0 \;\Leftrightarrow\; u''_\theta + \eta^2u = 0 \quad \text{avec } \eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2}}$$

Rq : η est bien défini puisque $1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2} > 0$ d'après la condition sur la vitesse établie en **3)**.

4.c) La solution générale de l'équation est : $u(\theta) = A\cos(\eta\theta) + B\sin(\eta\theta)$

À $t = 0$, $\theta_0 = 0$ (puisque $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{0}$), donc $\overrightarrow{e_r}(0) = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_\theta}(0) = \overrightarrow{e_y}$

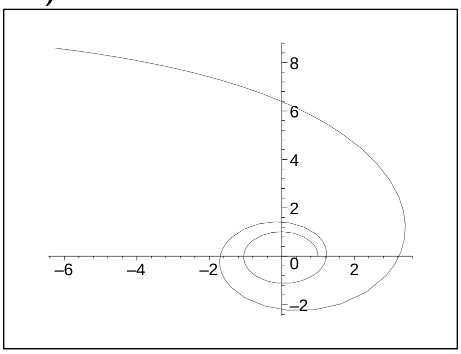
Soit $\overrightarrow{v_0} = \left\{\begin{array}{l} v_0\,\overrightarrow{e_y} \\ \dot{r}(0)\overrightarrow{e_r} + r_0\dot{\theta}(0)\overrightarrow{e_\theta} = \dot{r}(0)\overrightarrow{e_x} + r_0\dot{\theta}(0)\overrightarrow{e_y} \end{array}\right.$

Donc : $\dot{r}(0) = 0 = -r_0v_0u'(\theta_0)$ (d'après **4.a)**).

D'où $\left\{\begin{array}{ll} u(0) = \dfrac{1}{r_0} & = A \\ u'_\theta(0) = 0 & = -B\eta \end{array}\right.$

CI : $u(\theta) = \frac{1}{r_0}\cos(\eta\theta) \;\Leftrightarrow\; \boxed{r = \dfrac{r_0}{\cos\left(\theta\sqrt{1 - \dfrac{a}{mr_0^2v_0^2}}\right)}}$

4.d)



M7

■ Applications directe du cours

Ex-M7.3 État de diffusion et état lié

1) Un électron de vitesse $v_0 = 4.10^3\ m.s^{-1}$ se trouve à une distance $a = 10\ nm$ d'un proton. Peut-il y avoir formation d'un atome d'hydrogène ? (état lié) (on vérifiera que l'énergie potentielle de gravitation est négligeable devant les autres)

2) Quelle est la vitesse limite de l'électron pour qu'il n'y ait pas d'état lié possible ?

Données : masse de l'électron : $m_e = 9.10^{-31}\ kg$; masse du proton : $m_p = 1,7.10^{-27}\ kg$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ u.S.I.$

Rép. : 1) $\mathcal{E}_{p,\text{élec}} = -2,3.10^{-20}\ J$, $\mathcal{E}_{p,\text{grav}} = -1.10^{-60}\ J$, $\mathcal{E}_k = 7,2.10^{-24}\ J \to$ état lié car $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p \simeq \mathcal{E}_{p,\text{élec}} < 0$; **2)** $v_l = \sqrt{-\frac{2}{m_e}.\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_e q_p}{a}} = 2,26.10^5\ m.s^{-1}$

Ex-M7.4 Masse de la terre

En faisant l'hypothèse que la lune effectue un mouvement circulaire autour de la terre (hypothèse justifiée car l'excentricité de la trajectoire lunaire est de 0,0549), de période $T = 27,32\ jours$ et de rayon $R_L = 384\,400\ km$, calculer la masse de la terre en appliquant le PFD.

Rép. : $M_T \simeq 6,0.10^{24}\ kg$.

Ex-M7.5 Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération (ou vitesse d'« évasion ») à la surface des astres suivants, dont les masses et les rayons respectifs sont :

1) pour la Lune : $M_L = 7,4.10^{22}\ kg$ et $R_L = 1\,700\ km$,

2) pour Mars : $M_{Ma} = 6,4.10^{23}\ kg$ et $R_{Ma} = 3\,400\ km$,

3) pour Mercure : $M_{Me} = 3,3.10^{23}\ kg$ et $R_{Me} = 2\,440\ km$.

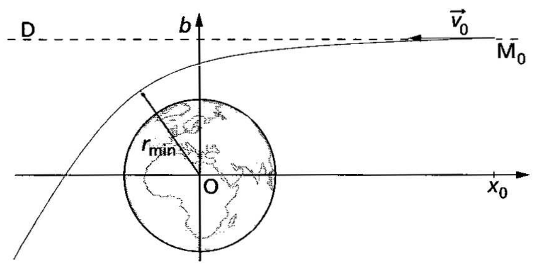
Rép : La vitesse de libération est caractérisée par une énergie mécanique (trajectoire parabolique) nulle du point matériel de masse m étudié (dans le référentiel « astrocentrique ») à la surface de l'astre de rayon R et de masse M : $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_l^2 - \mathcal{G}\dfrac{m.M}{R} = 0$, soit : $v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R}}$.

$v_{l,L} = 2,4\ km.s^{-1}$; $v_{l,Ma} = 5\ km.s^{-1}$; $v_{l,Me} = 4,2\ km.s^{-1}$.

Ex-M7.6 Distance minimale de passage d'un astéroïde

Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = Ox_0y_0z_0$ est supposé galiléen, et on néglige les effets gravitationnels du Soleil.

Un astéroïde de masse m et de taille négligeable par rapport à la masse M_T de la Terre est repéré en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est négligeable. On mesure son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{e_{x_0}}$, porté par la droite (M_0x_0) telle que la distance du centre de la Terre à (M_0x_0) est b (b est le « paramètre d'impact »).



1) Montrer que $\mathcal{E}_m(M)$ et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}_0}}(M)$ se conservent. Exprimer les deux constantes du mouvement en fonction des données initiales.

2) Exprimer l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ en fonction de m, M_T, et L_O.

3) Déterminer la distance minimale r_min à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre et donner la condition de non collision. On utilisera très utilement le potentiel effectif.

Rép : 1) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2$; $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}_0}}(M) = \overrightarrow{OM_0} \times m\overrightarrow{v_0} = mbv_0\overrightarrow{e_{z0}}$;

2) $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \mathcal{G}\frac{m.M_T}{r}$; **3)** $r_{\text{min}} = \frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\left(\sqrt{1 + \frac{b^2v_0^4}{\mathcal{G}^2M_T^2}} - 1\right)$

"Cependant la nuit marche, et sur l'abîme immense
Tous ces mondes flottants gravitent en silence,
Et nous-même, avec eux emportés dans leurs cours,
Vers un port inconnu nous avançons toujours."
Lamartine – Les Étoiles

■ Orbites circulaires

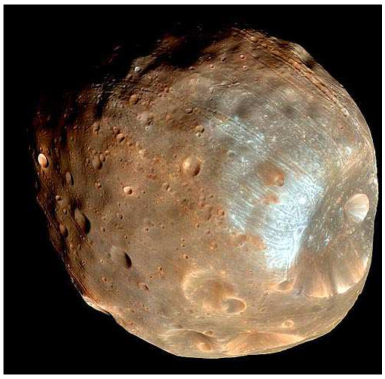
Ex-M7.7 satellite Phobos et Déimos de Mars

La planète Mars (masse $M_M = 6,24.10^{24}\ kg$) possède deux satellites naturels, Phobos et Déimos, considérés comme des astéroïdes en raison de leur petite taille et de leur forme irrégulière. La distance moyenne du centre de ces satellites au centre de Mars est $r_P \simeq 9\,379\ km$ pour Phobos et $r_D \simeq 23\,459\ km$ pour Déimos.

1) Calculer les vitesses de satellisation v_P et v_D de Phobos et Déimos.

2) En déduire leurs périodes de révolution respectives T_P et T_D, en jours, heures, minutes, secondes.

3) Vérifier que le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est indépendant du satellite. Quelle est l'expression littérale de ce rapport en fonction de M_M ?



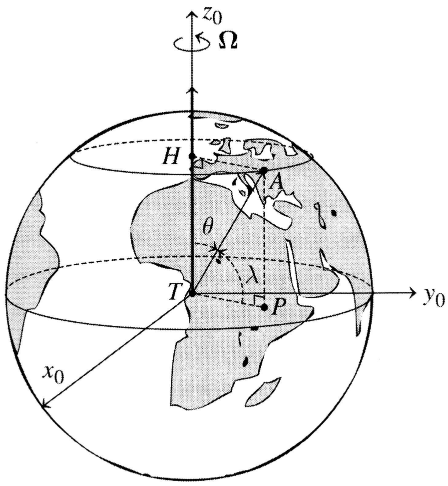
Phobos

Rép : **1)** $v_P = 6,67\ km.s^{-1}$; $v_D = 4,21\ km.s^{-1}$; **2)** $T_P = 8\,835\ s = 2\,h\ 27\,min\ 15\,s$; $T_D = 35\,010\ s = 9\,h\ 43\,min\ 31\,s$; **3)** $\frac{T_P^2}{r_P^3} = 9,46.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$; $\frac{T_D^2}{r_D^3} = 9,49.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$; 3^e loi de Képler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_M}$ avec $a = r$ pour une trajectoire circulaire.

Ex-M7.8 Vitesse d'un lanceur selon la latitude

Les lanceurs (ou fusées) sont tirés dans l'espace depuis des bases situées à des latitudes λ variées : Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5°$), Pletsek en Russie ($\lambda_2 = 63°$), Baïkonour dans le Kazakhstan ($\lambda_3 = 46,3°$), Tanegashima au Japon ($\lambda_4 = 30,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_5 = 5,2°$).

La fusée étant fixée au sol, calculer la norme v de sa vitesse, par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = Tx_0y_0z_0$ due à la rotation uniforme de la Terre, de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \omega_T\overrightarrow{e}_{S\to N}$ et de vitesse angulaire $\omega_T = 7,29.10^{-5}\ rad.s^{-1}$ autour de son axe sud-nord. Commenter.



Rép : $v_1 = 410\ m.s^{-1}$; $v_2 = 212\ m.s^{-1}$; $v_3 = 323\ m.s^{-1}$; $v_4 = 402\ m.s^{-1}$; $v_5 = 465\ m.s^{-1}$.

Ex-M7.9 Étude des planètes

1) Première loi de Kepler : « Dans le référentiel de Képler, une planète (point M, masse m) décrit une ellipse de foyer le soleil (point S, masse M_S) ».

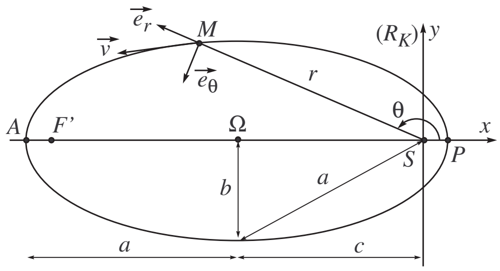
En choisissant correctement la direction des axes Sx et Sy, l'équation polaire d'une telle trajectoire est : $r = \dfrac{p}{1+e}$ avec $e = \dfrac{c}{a}$ et $p = \frac{b^2}{a}$

a est de demi grand-axe ; b le demi petit-axe ; $c = \Omega S$; p le paramètre et e l'excentricité.

L'excentricité e, comprise entre 0 et 1, donne une indication précise de la forme de la trajectoire. Plus l'excentricité est grande, plus l'ellipse est écrasée ; au contraire, une excentricité de zéro est celle d'un cercle ($r = a = b = p$).

L'aphélie (A) est le point de la trajectoire le plus éloigné du soleil et le périhélie (P) le point le plus proche.

→ Montrer que : $r_A = a(1+e)$ et $r_P = a(1-e)$



Les planètes du système solaire ayant une excentricité faible (voire très faible), par la suite, nous ferons toujours *l'approximation d'un mouvement circulaire* de centre S et de rayon R pour leurs trajectoires ($a \cong b \equiv R$).

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus
Excentricité	0,2056	0,0068	0,0167	0,0934	0,0484	0,0542	0,0472
Période (ans)	0,241	0,615	1	1,88	11,9	29,5	84,0

2) Rappeler la définition du référentiel héliocentrique.
3) En appliquant le PFD, déterminer la vitesse v de la planète en fonction de $\mathcal{G}$, M_S et R.
4) Troisième loi de Kepler : « $\dfrac{T^2}{a^3} = \text{Cte}$ pour toutes les planètes »
4.a) Démontrer que la valeur de $\dfrac{T^2}{R^3}$ est identique pour toutes les planètes (redémontrer la troisième loi de Kepler).
4.b) Application de la troisième loi de Képler : Calculer numériquement les valeurs de R en ua (unité astronomique) pour toutes les planètes sachant que pour la terre, $R \equiv 1\ ua$.
4.c) Autre application de la troisième loi de Kepler : Sachant que $1\ an = 365,25\ jours$ et $1\ ua = 1,49.10^8\ km$, déterminer la masse M_S du soleil.
5) Calculer alors la valeur numérique de la vitesse v de la terre dans le référentiel héliocentrique.

Ex-M7.10 Orbite géostationnaire (télécommunications, télévision, météo)

Un corps se trouvant sur une orbite géostationnaire possède une période de révolution égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même (24 h). Il paraît immobile par rapport à la surface de la Terre. L'orbite est circulaire.Le maintien nécessite des manœuvres de correction d'orbite consommant des ergols[1], leur épuisement étant la cause principale de fin de vie du satellite. Au 1er janvier 2005, on dénombrait 1 124 objets de plus d'1 m sur l'orbite géostationnaire. Parmi eux, 346 seulement sont des satellites opérationnels !
La ceinture de Van Allen[2] est, pour simplifier, à une altitude comprise entre 2000 km et 22 000 km. Elle est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui aveuglent les équipements des satellites.
La masse de la terre est $M_T = 6.10^{24}\ kg$ et son rayon $R_T = 6\,400\ km$.
1) En appliquant le PFD, déterminer le rayon R de l'orbite, puis son altitude h, et vérifier qu'il n'est pas dans la ceinture de Van Allen.
2) Déterminer les formules donnant la vitesse et l'énergie en fonction de $\mathcal{G}$, R, m_{sat} et M_T.
3) En orbite, un réservoir d'appoint du satellite explose et lui procure la vitesse $v = 6\ km.s^{-1}$. Est-ce suffisant pour l'arracher à l'attraction terrestre ?
4) Chute du satellite
4.a) En admettant que les deux formules établies en **2)** restent correctes par la suite, déterminer la loi donnant l'évolution de R au cours du temps dans le cas du frottement du satellite dans l'atmosphère (de masse volumique ρ) : $\overrightarrow{f} = -k\rho\overrightarrow{v}$. On utilisera le théorème de l'énergie mécanique.
4.b) Dans le cas d'un satellite spot ($m_{\text{sat}} = 2\ tonnes$) de coefficient $k = 1,35.10^5\ uSI$, à 822 km d'altitude la masse volumique de l'air est $\rho = 3.10^{-14}\ kg.m^{-3}$. Calculer de combien de mètres le satellite chute en 1 jour.
4.c) S'il évoluait à 250 km d'altitude, la masse volumique de l'air serait $\rho = 6,8.10^{-11}\ kg.m^{-3}$. Effectuer le même calcul et conclure.

Rép. : 1) $R = 42\,300\ km$; $h = 35\,900\ km$; **2)** $\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{M_T.m_{\text{sat}}}{R}$; **3)** $\mathcal{E}_m = m_{\text{sat}}.(8,5.10^6) > 0$; **4.a)** $R(t) = R(0).\exp\left(-\frac{2k\rho}{m_{\text{sat}}}.t\right)$; **4.b)** $\Delta z = -2,5\ m/jour$; **4.c)** $\Delta z = -5,3\ km/jours$

Ex-M7.11 La station spatiale internationale

En faisant l'hypothèse que ISS a un mouvement circulaire (excentricité = 0,00031) et une altitude de 384 km, déterminer sa vitesse v ainsi que sa période T en fonction uniquement de R_T, $g_0 = G(R_T)$ (champ gravitationnel terrestre à la surface de la Terre) et R_{ISS}.

1. Produits initiaux, séparés, utilisés dans un système propulsif à réaction (constitués d'éléments oxydant et réducteur).
2. James Alfred Van Allen, USA (1914 - 2006)

Effectuer les applications numériques. **Données :** $R_T = 6\,400\ km$

Rép. : $v = \sqrt{\dfrac{g_0.R_T^2}{R_{\mathsf{ISS}}}}$ et $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 R_{\mathsf{ISS}}^3}{g_0 R_T^2}}$

M7

■ Approche des orbites elliptiques

Ex-M7.12 Méthode du vecteur excentricité [d'après école de l'air 1987]

On se propose d'étudier le mouvement d'un satellite autour de la Terre. La seule force est l'attraction newtonienne de la Terre $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\mu m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$. Le satellite M de masse m est repéré par ses coordonnées polaires r et θ.

1) Établir la relation différentielle liant la vitesse $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. Cette relation s'intègre sous la forme $\overrightarrow{v} = \alpha\,(\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e})$ où $\overrightarrow{e}$ est un vecteur constant appelé vecteur excentricité et α une constante à déterminer en fonction de μ et C (où C est la constante des aires).

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{e_\theta}$. En déduire l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}} \qquad \text{où} \qquad e = ||\overrightarrow{e}|| \qquad \text{et} \qquad \theta_0 = (\overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e}).$$

Exprimer p en fonction de μ et C.

3) Montrer que l'on peut exprimer l'énergie totale $\mathcal{E}$ sous la forme : $\mathcal{E} = k\,(e^2 - 1)$. Exprimer k en fonction de μ, C et m.

Rép : 1) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu}{C}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} \to \overrightarrow{v} = \dfrac{\mu}{C}(\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e})$; **2)** $k = \dfrac{\mu^2 m}{2C^2}$

Ex-M7.13 Vecteur de Runge-Lentz (*)

On considère une particule ponctuelle M de masse m dont la position est repérée par ses coordonnées cylindriques $(r,\ \theta,\ z)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de repère $(Oxyz)$. Sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est notée $\overrightarrow{v}$. La particule est plongée dans un champ de force dérivant du « potentiel » $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ (avec $\alpha > 0$; il s'agit d'une autre manière de parler de l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p = V(r)$).

1) Montrer que $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v}$, moment cinétique de M par rapport à O dans R, est un vecteur constant. Exprimer $L_z = L_{O/\mathcal{R}}$ en fonction de m , r et $\dot\theta$. Cette relation est une intégrale première du mouvement.

2) Montrer que l'énergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + V(r)$ est une intégrale première du mouvement. Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de r, $\dot r, \dot\theta$, m et α.

3) a) Montrer que le vecteur $\boxed{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}} - \alpha\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}}$ est une intégrale première.

Comment sont disposés l'un par rapport à l'autre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$? Quelles sont les coordonnées polaires A_r et A_θ de $\overrightarrow{A}$ dans le repère mobile $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$?

Nous prendrons $\overrightarrow{e_x}$ suivant $\overrightarrow{A}$ (soit $A_x = A$). Montrer que dans ces conditions r, $\dot\theta$ et $\dot r$ peuvent être exprimés comme des fonctions de la seule variable θ et des paramètres L_z, A, m et α. Donner ces expressions.

b) Mettre l'expression de r sous la forme : $\boxed{\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos\theta}$

À quelle courbe correspond cette fonction ? Exprimer p et e en fonction des paramètres L_z, A, m et α.

c) Calculer $\mathcal{E}$ et $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$ en fonction des paramètres L_z, A, m et α.

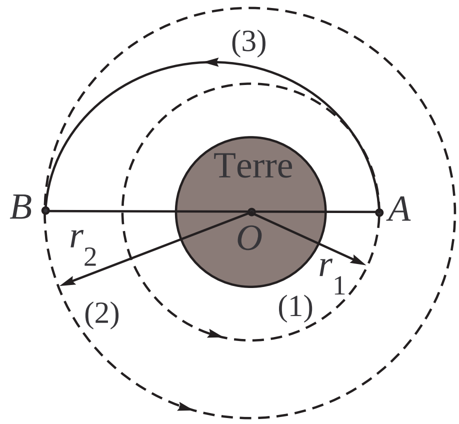
Quelle valeur maximale A_{max} peut prendre A pour que le mouvement reste de dimension finie ? Pour une valeur de A inférieure à A_{max} tracer l'allure de la courbe en indiquant la position du vecteur $\overrightarrow{A}$.

Rép : 1) $L_z = mr^2\dot\theta$; **2)** $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}(\dot r^2 + \dot r^2\dot\theta^2) - \dfrac{\alpha}{r} = \mathsf{Cte}$; **3.a)** $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{L_O}$; $A_r = mr^3\dot\theta^2 - \alpha$ et $A_\theta = -mr^2\dot r\dot\theta$; en tenant compte de la constante des aires $C = r^2\dot\theta = \dfrac{L_z}{m}$, si on impose $\overrightarrow{A} = A\overrightarrow{e_x}$

(soit $\overrightarrow{A} = A\cos\theta\overrightarrow{e_r} - A\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$), on a : $r = \dfrac{L_z^2}{\alpha m}\dfrac{1}{1+\dfrac{A}{\alpha}\cos\theta}$; $\dot\theta = \dfrac{L_z}{mr^2} = \dfrac{m}{L_z^3}(A\cos\theta+\alpha)^2$; $\dot r = \dfrac{A\sin\theta}{L_z}$; **3.b)** $p = \dfrac{L_z^2}{\alpha m}$ et $e = \dfrac{A}{\alpha}$; **3.c)** $\mathcal{E} = \dfrac{m}{2L_z^2}(A^2-\alpha^2)$ et $a = \dfrac{\alpha L_z}{m(\alpha^2-A^2)}$.

Ex-M7.14 Transfert d'orbite (*, ➜ à voir absolument)

On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6\,400+500\,km$ (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = 6\,400+36\,000\,km$. Pour cela, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite ellipse de HOHMANN dont la Terre est un foyer.



Données : masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}\,kg$; constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-1}$.

1) Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.

2) Exprimer l'énergie mécanique du satellite $\mathcal{E}_{m1}$ sur sa trajectoire basse.

3) Exprimer l'énergie mécanique du satellite $\mathcal{E}_{m3}$ sur l'ellipse de transfert.

4) Que faire pour que le satellite au point A passe de sa trajectoire circulaire initiale à l'ellipse de HOHMANN ?

Exprimer et calculer l'écart de vitesse $\Delta v_A = v_{A,(3)} - v_{A,(1)}$ nécessaire.

5) Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ?

Exprimer et calculer l'écart de vitesse $\Delta v_B = v_{B,(2)} - v_{B,(3)}$ nécessaire.

6) Exprimer et calculer la durée du transfert (entre A et B).

Rép : 1) $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_1}} = 7\,600\ m.s^{-1}$; **2)** $\mathcal{E}_{m1} = -\mathcal{E}_{k1} = \dfrac{\mathcal{E}_{p1}}{2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_Tm}{r_1} < 0$;
3) $\mathcal{E}_{m3} = -\dfrac{\mathcal{G}M_Tm}{r_1+r_2} < 0$; **4)** $\Delta v_A = v_1\left(\sqrt{\dfrac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) \simeq 2\,370\ m.s^{-1}$;
5) En posant $v_2 = v_{B,(2)} = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_2}}$: $\Delta v_B = v_2\left(1 - \sqrt{\dfrac{2r_1}{r_1+r_2}}\right) \simeq 1\,440\ m.s^{-1}$;
6) $\Delta t_{A\to B} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2\mathcal{G}M_T}}(r_1+r_2)^{3/2} \simeq 5\,h\,21\,min$

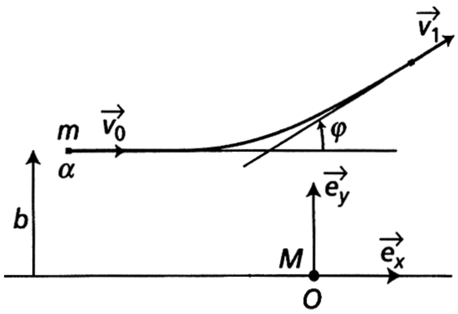
M7

■ Autres exercices

Ex-M7.15 Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford est l'expérience historique qui a établi le caractère lacunaire de la matière, l'essentiel de la masse d'un atome étant concentrée dans un noyau très petit devant les dimensions de l'atome.

On se propose d'étudier la déviation angulaire φ de la trajectoire d'une particule α par un noyau massif de masse M et de charge Ze. Une particule α est un noyau d'hélium de masse m et de charge $2e$ (ion hélion).



La particule α arrive avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ et une ordonnée b loin du noyau, situé à l'origine des coordonnées.

1) En supposant la masse M suffisamment grande pour que le noyau massif reste pratiquement immobile, déterminer deux constantes du mouvement de la particule α.

2) En déduire que le mouvement est plan, et déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_1}$ loin du noyau massif, après l'interaction.

3)

3.a) Montrer que la composante selon $\overrightarrow{e_y}$ de l'accélération de la particule α peut s'exprimer en fonction de θ et de $\dot{\theta}$, où r et θ représentent les coordonnées polaires de la particule α dans le plan de la trajectoire.
3.b) Déterminer la composante selon $\overrightarrow{e_y}$ de $\overrightarrow{v_1}$ et en déduire l'angle de déviation φ.
4) On répète l'expérience de Rutherford en envoyant sur une cible fixe dans le référentiel du laboratoire et constitué par une très mince feuille d'or, des hélions d'énergie $\mathcal{E}_0 = 5\ MeV$. On supposera la masse des atomes d'or grande devant la masse des hélions. On observe une déviation des hélions atteignant 150° au maximum.
4.a) Calculer la valeur minimale b_{min} du paramètre d'impact.
4.b) Calculer la plus petite distance d'approche r_0 d'un hélion et d'un noyau d'or, lorsque le paramètre d'impact a pour valeur b_{min}. En déduire une borne supérieure de la valeur du rayon du noyau de l'atome d'or.
Donnée : Numéro atomique de l'or $Z = 79$.

Rép : **3.b)** $\tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m b v_0^2}$; **4.b)** $b_{\text{min}} = 6,17.10^{-15}\ m$; **4.b)** $r_0 = 4,5.10^{-14}\ m$.

Solution Ex-M7.4

Q : Masse de la terre ?
On travaille dans le Référentiel géocentrique, supposé galiléen.
Système $\mathcal{S} = \{\text{Lune}\}$.
Hypothèse : trajectoire circulaire car excentricité proche de 0.

PFD : $m_L \underbrace{\left(-\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}\right)}_{\text{Mvmt circulaire}} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T.m_L}{R^2}\overrightarrow{e_r}$, d'où $v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}.M_T}{R}}$

Or, pour un mouvement circulaire : $v = R\omega = \dfrac{2\pi.R}{T}$, donc : $\boxed{M_T = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}}.\dfrac{R^3}{T^2} = 6,0.10^{24}\ kg}$

Solution Ex-M7.11

On travaille dans le Référentiel géocentrique, supposé galiléen.
Système $\mathcal{S} = \{\text{Station Spatiale Internationale}\}$.
Hypothèse : trajectoire circulaire car excentricité proche de 0.

PFD : $m_{\text{ISS}} \underbrace{\left(-\dfrac{v^2}{R_{\text{ISS}}}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}\right)}_{\text{Mvmt circulaire}} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T.m_{\text{ISS}}}{R_{\text{ISS}}^2}\overrightarrow{e_r}$, d'où $v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}.M_T}{R_{\text{ISS}}}}$

Déf : le champ gravitationnel en un point M est la force gravitationnelle que subit un point matériel placé en M divisée par sa masse m : $\overrightarrow{G}(M) = \dfrac{\overrightarrow{F}_{\text{grav}}}{m}$
Donc, le champ gravitationnel dû à la Terre de masse M_T est, à la surface de la Terre : $G(R_T) = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$

Comme $\mathcal{G}.M_T = G(R_T).R_T^2$, on peut écrire : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G(R_T).R_T^2}{R_{\text{ISS}}}}}$

Or, en identifiant pour un corps de masse m quelconque le champ gravitationnel dû à la Terre avec le champ de pesanteur, on a : $G(R_T) = g_0 \simeq 9,8\ m.s^{-2}$, et donc : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{g_0.R_T^2}{R_{\text{ISS}}}} \simeq 7,7\ km.s^{-1}}$

Comme $v = R_{\text{ISS}}\omega = R_{\text{ISS}}.\dfrac{2\pi}{T}$ pour un mouvement circulaire, on a :

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g_0.R_T^2}.R_{\text{ISS}}^3} \simeq 1\,h\ 32\,min}$$