M6

■ Moment d'une force (et rappels sur le produit vectoriel)

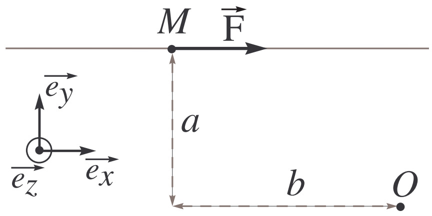
Ex-M6.1 Q.C.M.

1) Quelle est la dimension du moment évalué en O d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en M ?
a) $[\mathcal{M}] = M.L.T^{-2}$ b) $[\mathcal{M}] = M.L^2.T^{-1}$ c) $[\mathcal{M}] = M.L^2.T^{-2}$ d) $[\mathcal{M}] = L^2.T^{-3}$

2) À quelle autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ?
a) Une vitesse b) Une énergie c) Un travail d) Une puissance

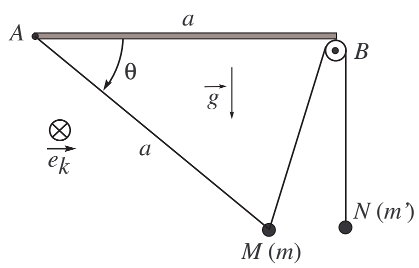
3) Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})$ de la force $\overrightarrow{F}$, d'intensité $\| \overrightarrow{F} \| = F$, par rapport à O est :

a) $Fa\,\overrightarrow{e_z}$ **b)** $-Fb\overrightarrow{e_y}$
c) $-Fb\overrightarrow{e_z}$ **d)** $-Fa\overrightarrow{e_z}$



Ex-M6.2 Moments des forces et condition d'équilibre [d'après Concours Mines-Ponts]

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à une socle horizontal AB (de longueur a), et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions.
En un point M, tel que $AM = a$, est fixée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N.
Le dispositif est placé verticalement dans le champs de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

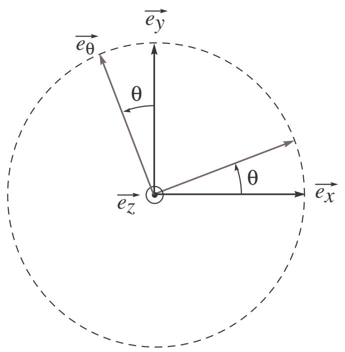


1) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A ; le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera : $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.
2) Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer, quand il existe, l'angle d'équilibre θ_e, en fonction de m et m'.

Ex-M6.3 Rappel sur le produit vectoriel

1) Choisir la ou le(s) bonne(s) réponse(s).
Les bases $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ sont orthonormées et directes.

a) $\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y}$ **b)** $\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}$
c) $\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_y} = -\cos\theta\overrightarrow{e_z}$ **d)** $\overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_y} = -\sin\theta\overrightarrow{e_z}$



2) Deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont exprimés dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$:

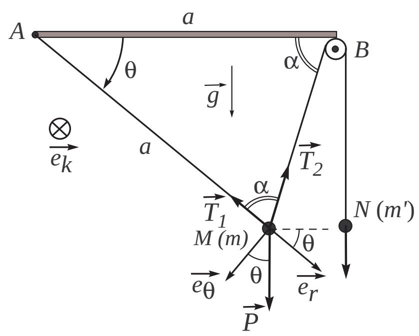
$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Leurs produit vectoriel $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ est :

a) $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_2b_3 - a_3b_2 \end{pmatrix}$ d)$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Solution Ex-M6.1

1) Rép : c) ; **2) Rép : b)** et **c)** ; **3) Rép : d)**

Solution Ex-M6.2



1) • On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le système $\{M, m\}$ est soumis :
- à son poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
- à la tension $\overrightarrow{T_1}$ de la portion de fil AM, orientée de M vers A : $\overrightarrow{T_1} = -T_1\overrightarrow{e_r}$ (avec $T_1 = \| \overrightarrow{T}_1 \|$)
- à la tension $\overrightarrow{T_2}$ de la portion de fil MB, orientée de M vers B : $\overrightarrow{T_2} = T_2\overrightarrow{e}_{M\to B}$ (avec $T_2 = m'g$ car la poulie étant parfaite et le fil étant tendu, l'intensité du poids qui s'exerce en N est intégralement transmise en M).

• Chacune de ces forces présente, en A, un moment calculable dès que l'on s'est fixé une base orthonormée directe de l'espace – $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e}_k)$ par exemple.
• Pour le poids, ce moment vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{P} = AM.P.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\overrightarrow{e}_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) = mga\cos\theta\,\overrightarrow{e}_k}$$

• Puisque $\overrightarrow{T_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, son moment est nul : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_1}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{0}}$

• Pour la tension $\overrightarrow{T_2} = m'g\,\overrightarrow{e}_{M\to B}$, avec le vecteur $\overrightarrow{e}_{M\to B}$ contenu dans le plan du dessin et faisant un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ (puisque AMB est isocèle en A) avec le vecteur $-\overrightarrow{e_r}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T_2} = \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e}_k)}{\left|\begin{array}{l} a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.} \times \left|\begin{array}{l} -m'g\cos\alpha \\ -m'g\sin\alpha \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -m'ga\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) \end{array}\right.$$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = -m'ga\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{e}_k}$

2) • Le point M est soumis à une force résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$ dont le moment en A vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) + \cancel{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_1})} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = \left[mga\cos\theta - m'ga\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\overrightarrow{e}_k$$

Le point M est à l'équilibre à condition que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$ (aucune rotation de M autour de A), ce qui revient à imposer :

$$m\cos\theta - m'\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2m\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - m'\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - m = 0$$

rappel de Trigo : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, qu'on utilise ici en posant $x = \dfrac{\theta}{2}$.

• Par conséquent, étudier l'équilibre de M revient à résoudre un polynôme de degré 2 :

$$2mX^2 - m'X - m = 0 \quad \text{avec } X \equiv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = m'^2 + 8m^2 > m'^2 > 0$. Il existe donc deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} > 0 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{m' - \sqrt{\Delta}}{4m} < 0$$

Puisque θ est nécessairement compris entre 0 et π, on a $\dfrac{\theta}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$.

On en déduit que X_2 n'a pas de signification physique et que l'unique solution est X_1 :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}}$$

Sachant que cette solution n'a de sens que pour $X_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 1$, on doit vérifier l'inégalité suivante :

$$m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2} \leq 4m \;\Leftrightarrow\; m'^2 + 8m^2 \leq 16m^2 - 8mm' + m'^2 \;\Leftrightarrow\; 8m(m - m') \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{m \geq m'}$$

Solution Ex-M6.3

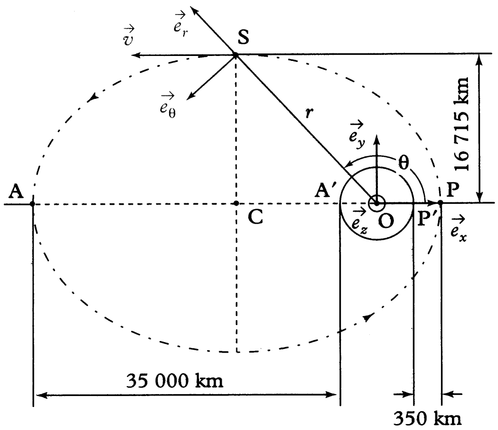
1) Rép : b) et **d)** ; **2) Rép : a)**

M6

■ Théorème du moment cinétique

Ex-M6.4 Moment cinétique d'un satellite

Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse $m = 1\,tonne$, décrit une trajectoire elliptique autour de la terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction fravitationnelle $\overrightarrow{F}$ dirigée vers le centre de force O, centre d'inertie de la Terre.
Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g\,(Oxyz)$ est supposé galiléen.
À l'instant représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiele st : $v = 14\,650\,km.h^{-1}$.
Donnée : la rayon de la Terre est : $R_T = 6\,400\,km$.
1) calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans $\mathcal{R}_g$ à l'instant considéré.

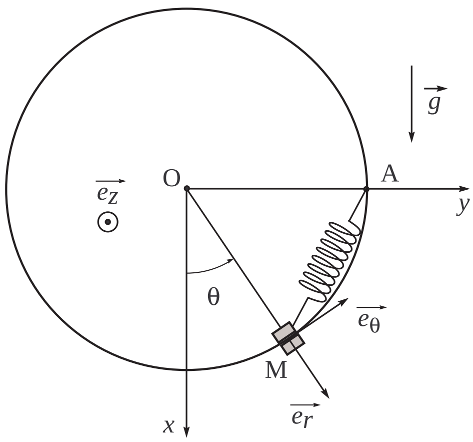


2) À l'aide du Théorème du Moment Cinétique, donner la valeur de la vitesse du satellite :
- ◦ à son apogée A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre),
- ◦ à son périgée P (point de la trajectoire le plus proche de la Terre).

Rép : 1) $L_O \simeq 6,8.10^{13}\ kg.m^2.s^{-1}$.
2) $v_A = \dfrac{L_O}{m(AA' + R_T)} \simeq 5,9.10^3\ km.h^{-1}$ et $v_P = \dfrac{L_O}{m(R_T + PP')} \simeq 3,6.10^4\ km.h^{-1}$.

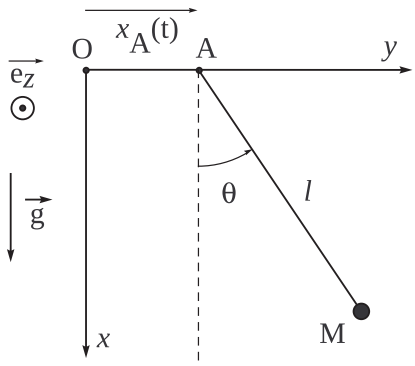
Ex-M6.5 Trois méthodes pour l'étude d'un même mouvement

Un point matériel de masse m est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.
1) Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :
a) le théorème du moment cinétique ;
b) la relation fondamentale de la dynamique ;
c) le bilan énergétique.
2) Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.



Rép : 1) $\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin\theta - \omega_0^2 \cos\theta = 0$; **2)** $\theta_1 = \arctan\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2}$ (Éq. stable) et $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ (Éq. instable).

Ex-M6.6 Théorème du moment cinétique appliqué à un point mobile



Prenons un pendule simple, de masse m et de longueur l, et imposons de petites oscillations horizontales à son extrémité A : $x_A = x_0 \sin \omega t$.

1) Pour utiliser le théorème du moment cinétique, pourquoi vaut-il mieux l'appliquer au point mobile A plutôt qu'au point fixe O ?
Reprendre alors la démonstration du théorème pour exprimer la dérivée : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g}$

2) Établir l'équation du mouvement du pendule simple effectuant de petites oscillations.

3) Quel est son mouvement lorsqu'un régime sinusoïdal permanent s'est établi (ce qui suppose quelques frottements, que nous avons en fait négligés)

4) Quelle est la pulsation ω_0 au voisignage de laquelle nos hypothèses d'étude sont à reprendre ? Que dire des mouvements du point A et du mobile selon que $\omega < \omega_0$ ou que $\omega > \omega_0$?

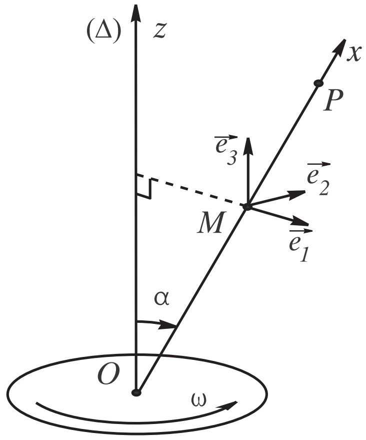
Rép :

1) $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}_g}}(M)}{\mathrm{d}}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) + m\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} \times \vec{v}_{A/\mathcal{R}}$

2) $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega^2 \dfrac{x_0}{l}\sin(\omega t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

3) $\theta(t) = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\dfrac{x_0}{l}\sin(\omega t)$.

Ex-M6.7 Tige soudée à un plateau tournant (➜ Cf **Ex-M2.12** pour **1)**)



Une tige OP rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante ω. Cette tige forme un angle constant α avec l'axe vertical $(Oz) = (\Delta)$.
Un point matériel de masse m pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

1) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

a) préciser la position x_e de l'équilibre relatif ;

b) donner les composantes R_1, R_2 et R_3 de la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ liée à la tige.

2) Écrire le théorème du moment cinétique en H, puis en O. Vérifier ainsi les résultats précédents.

Rép :

1.a) En projetant le **P.F.D.** selon $\vec{e_x}$, il vient $x_e = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$

1.b) $R_1 = -\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{mg}{\tan\alpha}$; $R_2 = 0$; $R_3 = mg$

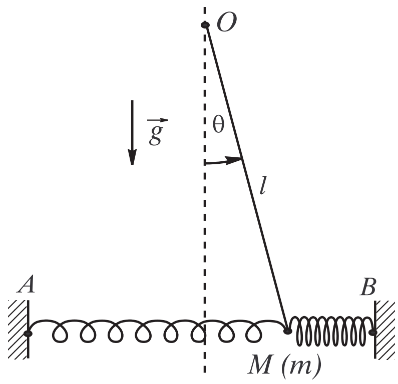
2) $\overrightarrow{L_{H/\mathcal{R}_T}}(M) = mr^2\omega\vec{e_z}$

T.M.C. pour M évalué en H $\rightarrow$ $R_2 = 0$ et $R_3 = mg$ — $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}_T}}(M) = m\omega x_e^2(-\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin^2\alpha\,\vec{e}_3)$, avec $\vec{e}_1 = \vec{e_r}$ et $\vec{e_3} = \vec{e_z}$

T.M.C. pour M évalué en O $\rightarrow$ $R_1 = -\dfrac{mg}{\tan\alpha}$

Ex-M6.8 **Oscillateurs à deux ressorts**

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur l rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité supérieure O. À l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. Par ailleurs, ce point M est relié à deux ressorts identiques $(k,\, l_0)$ eux-mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est verticale.
On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.



→ En appliquant le théorème du moment cinétique en O, montrer que le mouvement est harmonique et que la périodes des petites oscillations s'écrit : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}}}$

➜ Exercices supplémentaires :
DM19 (Atome de Thomson) et **DM20** (Atome de Bohr) : à voir absolument.