

Exercices – Mécanique

M1

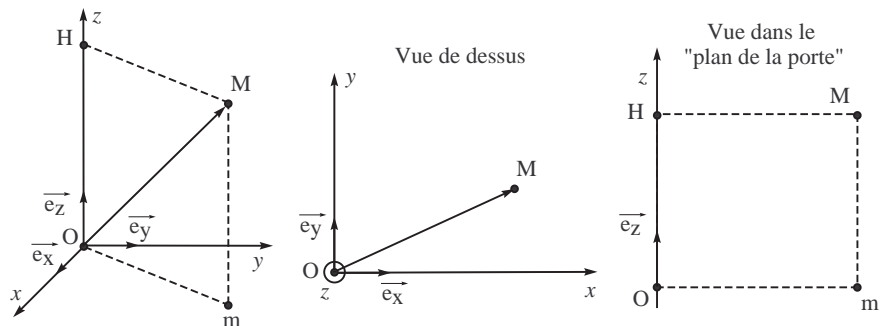
■ Cinématique : repères, bases, trajectoires et mouvements

□ **Méthode 1.**— Une base locale (comme la base cylindrique) est définie :
 - en un point M de l'espace (« localement », donc!)
 - par rapport à trois directions orthogonale fixes du repère cartésien dans lequel on travaille.
 → Il faudra donc **toujours** représenter **en premier** le repère cartésien (une origine O , trois axes Ox , Oy et Oz qui doivent être *orientés par une flèche*, et les trois vecteur unitaires \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z correspondants) **avant** de dessiner la base locale au point M .

Ex-M1.1 Base locale cylindrique

Recopier les trois schémas suivants. Y faire apparaître les trois vecteurs de la base cylindrique et les coordonnées cylindriques correspondante. Exprimer, dans cette base locale, le vecteur position \vec{OM} , le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}$ et le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM}$. **Rép. :** cf. p. 5.

Retenir :
 Dès la 1^e période, nous avons absolument besoin de **la base cylindrique**
 → donc :
 la comprendre et bien l'étudier dès à présent.

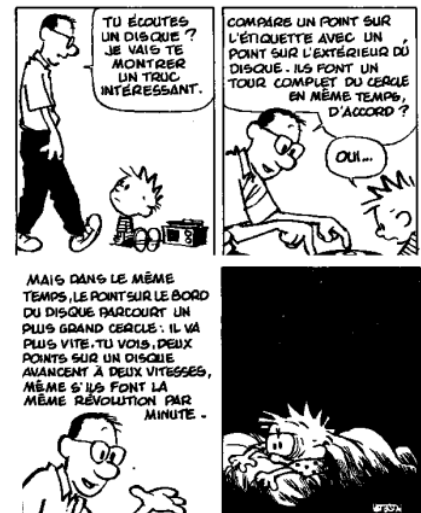


Ex-M1.2 Mouvement circulaire uniforme :

Un « disque vynile 33 tr », placé sur la platine du tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

- 1) sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence ;
- 2) la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point M à la périphérie du disque (rayon $R = 15\text{ cm}$).
- 3) même question pour un point M' tournant à $r = 5\text{ cm}$ du centre du disque.

Rép. : 1) $\omega = 3,5\text{ rad.s}^{-1}$; $f = 0,55\text{ Hz}$; $T = 1,8\text{ s}$.
 2) $v = 0,52\text{ m.s}^{-1}$; $a_n = 1,8\text{ m.s}^{-2}$; $a_t = 0$; $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.
 3) $v' = 0,17\text{ m.s}^{-1}$; $a'_n = 0,6\text{ m.s}^{-2}$; $a'_t = 0$; $a' = a'_n$.



Conclusion :

S'il y a une chose à retenir de cet exercice, c'est que l'accélération d'un mouvement uniforme n'est **pas** nulle si la trajectoire n'est **pas** une droite.
Autrement dit :
 Seul le mouvement **rectiligne** uniforme possède une accélération nulle.

Ex-M1.3 Centrifugeuse

Au cours de leur entraînement, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur l , en rotation de vitesse angulaire ω constante.

Calculer ω en tours par minute, si $l = 5 \text{ m}$ et si l'accélération obtenue a pour valeur $6g$. ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$)

Rép. : $\omega \simeq 3,43 \text{ rad.s}^{-1}$

Ex-M1.4 Q.C.M. sur l'accélération :

Pour chacune des questions, indiquer les propositions exactes :

1) Le vecteur accélération d'un point M :

- a) est égal à la variation de la vitesse par unité de temps ;
- b) est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée ;
- c) possède, lorsqu'on l'exprime dans une base orthonormée, des coordonnées obtenues en dérivant les coordonnées correspondantes du vecteur vitesse.

2) Le vecteur accélération d'un point M en **mouvement rectiligne accéléré** est :

- a) toujours porté par la trajectoire ;
- b) de même sens que le vecteur vitesse ;
- c) toujours de valeur constante.

3) Le vecteur accélération d'un point M se déplaçant sur une **trajectoire curviligne** est :

- a) tangent à la trajectoire ;
- b) dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ;
- c) nul si la vitesse de M est constante.

4) L'unité de mesure de l'accélération est : a) m.s^2 b) $\text{m}^2.\text{s}^2$ c) m.s^{-2} .

Rép. : cf. p.4.

Ex-M1.5 Éléments cinétiques et base cartésienne [P9/255]

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant : $x(t) = a_0.t^2 + x_0$, $y(t) = -v.t$ et $z(t) = z_0$, avec $x_0 = 1 \text{ m}$, $z_0 = -1 \text{ m}$, $a_0 = 2 \text{ m.s}^{-2}$ et $v = 3 \text{ m.s}^{-1}$

1) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.

2) Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 2 \text{ s}$.

3) Calculer la norme de l'accélération de M à la date $t = 1 \text{ s}$.

Rép. : 2) $v(2 \text{ s}) = 8,5 \text{ m.s}^{-1}$; 3) $a(1 \text{ s}) = a = 4 \text{ m.s}^{-2}$

Ex-M1.6 Éléments cinétiques et base cylindrique [P9/255]

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant : $r(t) = a_0.t^2 + r_0$, $\theta(t) = \omega.t - \theta_0$ et $z(t) = -v.t$, avec $r_0 = 1 \text{ m}$, $a_0 = 1 \text{ m.s}^{-2}$, $\omega = 3 \text{ rad.s}^{-1}$, $\theta_0 = 2 \text{ rad}$ et $v = 2 \text{ m.s}^{-1}$.

1) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

2) Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 1 \text{ s}$.

3) Calculer la norme de l'accélération de M à l'instant initial ($t = 0$).

Rép. : 1) $\vec{v}_{M/R} = 2a_0.t \vec{e}_r + \omega(a_0.t^2 + r_0) \vec{e}_\theta - v \vec{e}_z$; $\vec{a}_{M/R} = (2a_0 - (a_0.t^2 + r_0).\omega^2) \vec{e}_r + 4a_0.t.\omega \vec{e}_\theta$;

2) $v(1 \text{ s}) = 6,6 \text{ m.s}^{-2}$; 3) $a(0) = 7 \text{ m.s}^{-2}$

Ex-M1.7 Mouvement elliptique (→ Cf Cours M7)

L'équation polaire d'une ellipse avec origine au foyer est : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

où p note le paramètre et e , l'excentricité de l'ellipse.

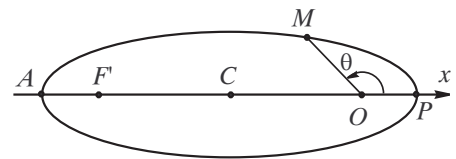
1) Pour un satellite, P est le *périgée* et A est l'*apogée*.

→ Déterminer les expressions de r_P et r_A .

2) Sachant que le mouvement est tel que $r^2 \dot{\theta} = \text{cste} = C$, déterminer l'expression de \vec{v} sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Cette expression sera donnée en fonction de la seule variable θ .

3) Déterminer \vec{v} en $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Représenter, en chacun de ces points, \vec{v} , \vec{e}_r et \vec{e}_θ . En quel point de la trajectoire la vitesse est-elle maximale ? minimale ?

Rép. : 2) $\vec{v} = C \left(\frac{e \sin \theta}{p} \vec{e}_r + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \vec{e}_\theta \right)$; 3) $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)$.



Ex-M1.8 Relation vitesse-position :

Un mobile décrit la partie positive de l'axe (Ox) avec une vitesse de la valeur $v(t)$. La loi de vitesse $v(t)$ est liée à l'équation horaire $x(t)$ par la relation $x = av^2$, avec a une constante positive. Le point matériel quitte l'origine O de l'axe à l'instant $t = 0$.

Déterminer la loi horaire $x(t)$ sachant que $x(t)$ est une fonction croissante du temps.

Rép. : $x(t) = \frac{t^2}{4a}$.

Ex-M1.9 Poursuite en mer

Deux navires se trouvent sur le même méridien, A étant au nord de B et à une distance d_0 . A se dirige vers l'est à la vitesse v_A et B vers le nord à la vitesse v_B . La courbure de la surface terrestre est négligée et les vitesses sont constantes.

1) Déterminer la distance minimale entre A et B .

2) Quelle direction B doit-il prendre pour rattraper A avec un mouvement rectiligne uniforme ? Déterminer la durée de la poursuite.

Rép. : 1) $d_{\min} = d_0 \sqrt{\frac{v_A^2}{v_A^2 + v_B^2}}$; 2) $\tau = \frac{d_0}{\sqrt{v_B^2 - v_A^2}}$

Ex-M1.10 Oscillations rectilignes [P9/257]

Un point est astreint à se déplacer sur un axe (Ox). À la date $t = 0$, il se trouve à la position $x = 10 \text{ cm}$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_x$ ($v_0 = 0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Par la suite, il est à chaque instant soumis à une accélération définie par $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -K \cdot \vec{OM}$ avec $K = 2,0$ unités SI .

1) Quelles sont les dimensions de la constante K ? En déduire son unité SI .

2) Établir l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de M sur cet axe.

3) Exprimer, puis calculer la période des oscillations de M .

Rép. : 2) $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{K}t) + \frac{v_0}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t) = X_m \cos(\sqrt{K}t + \varphi)$ avec $X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\sqrt{K}}\right)^2} = 0,15 \text{ m}$ et $\varphi = -\arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{K}x_0}\right) = -0,81 \text{ rad}$; 3) $T = 4,4 \text{ s}$.

Ex-M1.11 Dépassement d'un autocar

Sur une route rectiligne Ox , une voiture (1) de longueur l_1 de vitesse v_1 double un autocar de longueur L et de vitesse V . En face arrive une voiture (2) de longueur l_2 à la vitesse v_2 . Quelle distance minimum D entre l'avant de la voiture (1) et l'avant de la voiture (2) permet à la voiture (1) de doubler ? **A.N.** avec $l_1 = l_2 = 4 \text{ m}$, $L = 20 \text{ m}$, $v_1 = v_2 = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ et $V = 72 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Rép. : cf. p. 6.

Ex-M1.12 Tir au pigeon d'argile [P8/119]

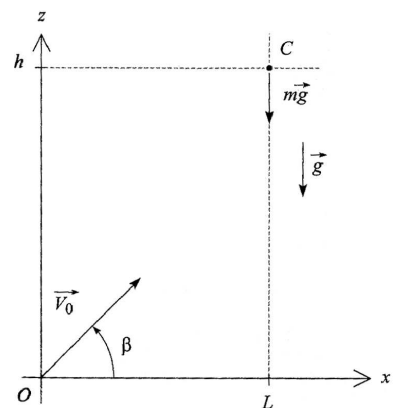
Une cible C est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur h à l'abscisse $x = L$. Au même instant, un projectile P est tiré depuis l'origine avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle β avec l'horizontale.

On admet que l'accélération d'un corps en chute libre est égale à \vec{g} à chaque instant.

Calculer l'angle β pour que le projectile atteigne sa cible.

Quelle est la date t_1 à laquelle la cible est alors atteinte ?

Rép. : $\tan \beta = \frac{h}{L}$ et $t_1 = \frac{L}{v_0 \cdot \cos \beta}$

**Ex-M1.13** Freinage d'urgence [P9/256]

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a = 4,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Calculer la durée t_1 et la distance D de freinage.

Rép. : $t_1 = 6 \text{ s}$ et $D = 74 \text{ m}$.

Ex-M1.14 Spirale et base polaire

Un point matériel M parcourt avec une vitesse de norme constante v la spirale d'équation polaire : $r = a\theta$. Exprimer en fonction de θ et de v le vecteur vitesse de M dans la base polaire.

Rép. : $\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}} (\vec{e}_r + \theta \vec{e}_\theta)$.

Ex-M1.15 Vitesse moyenne et vitesse maximale

Un automobiliste parcourt une distance $d = 1,25 \text{ km}$ sur une route rectiligne. Son mouvement est uniformément accéléré, puis uniforme, puis uniformément retardé. L'accélération a est égale en valeur absolue à 0 m.s^{-2} ou à $2,5 \text{ m.s}^{-2}$ et la vitesse moyenne vaut 75 km.h^{-1} .

Déterminer la vitesse maximale de l'automobiliste.

Rép : $v_{\max} = \frac{a.d}{2v_{\text{moy}}} - \sqrt{\left(\frac{a.d}{2v_{\text{moy}}}\right)^2 - a.d} = 25 \text{ m.s}^{-1} = 90 \text{ km.h}^{-1}$

Ex-M1.16 Mouvement hélicoïdal (*)

Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques par les équations : $r = R$ et $z = h\theta$

et orientée dans le sens θ croissant (soit $h > 0$).

L'origine de la trajectoire du point M est en $z = 0$.

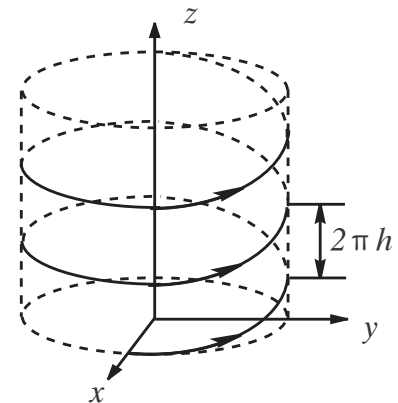
1) Déterminer les équations de l'hélice en coordonnées cartésiennes.

2) Le point M parcourt l'hélice à une vitesse constante v .

a) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en fonction de R , h et v .

b) Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{v})$ est constant.

En déduire l'hodographe du mouvement.

**Ex-M1.17 Mouvement cycloïdal (**)**

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) à vitesse angulaire ω constante tout en restant dans le plan (Oxz) . Soit M un point liée à la roue situé sur la circonférence. À l'instant $t = 0$, M se trouve en $M_0(x = 0, z = 2R)$. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel R associé au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1) Comment exprimer la condition « la roue ne glisse pas » ?

2) Déterminer les coordonnées x_C et z_C de C à l'instant t .

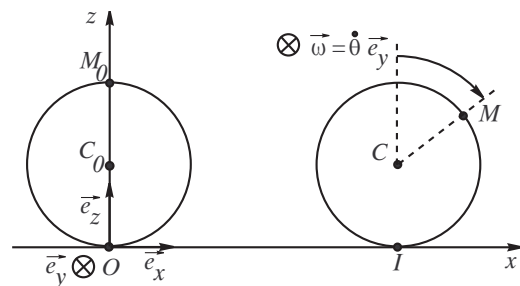
3) Même question pour M.

4) Étudier la trajectoire définie par le système d'équations paramétriques $(x(\theta), z(\theta))$ avec $\theta = \omega t$. La tracer pour $\theta \in [-4\pi; 4\pi]$.

5) Calculer la vitesse $\vec{v}_{M/R}$ du point M à l'instant t . Exprimer sa norme v en fonction de $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$. En déduire l'hodographe du mouvement.

6) Calculer l'accélération $\vec{a}_{M/R}$ du point M à l'instant t . Exprimer sa norme en fonction de R et v . Calculer numériquement cette norme de l'accélération dans le cas d'un point périphérique d'un pneu de voiture roulant à 130 km.h^{-1} sur une autoroute ($R = 35 \text{ cm}$).

7) Déterminer $\vec{v}_{M/R}$ et $\vec{a}_{M/R}$ lorsque M est en contact avec l'axe (Ox) .



Solution Ex-M1.1

M a pour coordonnées (r, θ, z) dans le référentiel \mathcal{R} d'origine O et de Base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ (base « locale » = base définie en M) :

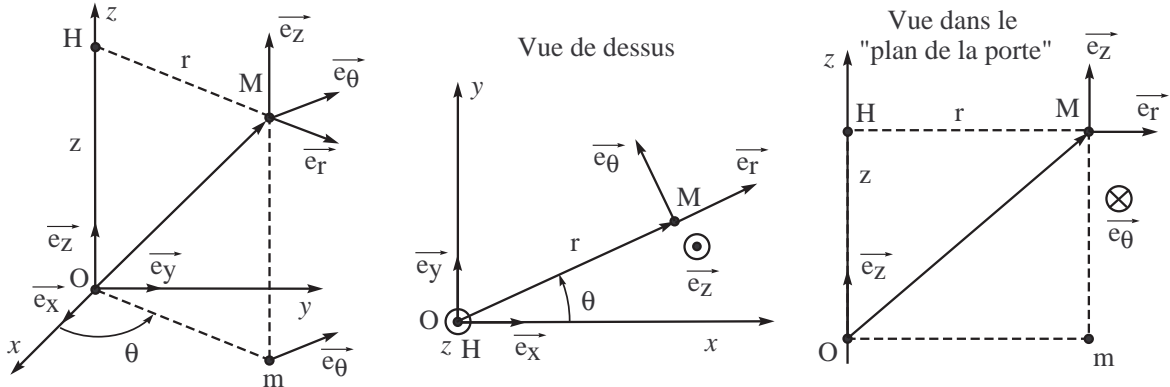
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

Rque : Une B.O.N.D. vérifie la « règle des trois doigts de la main droite » → alors **vérifiez-le** avec la vôtre, de main droite!

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

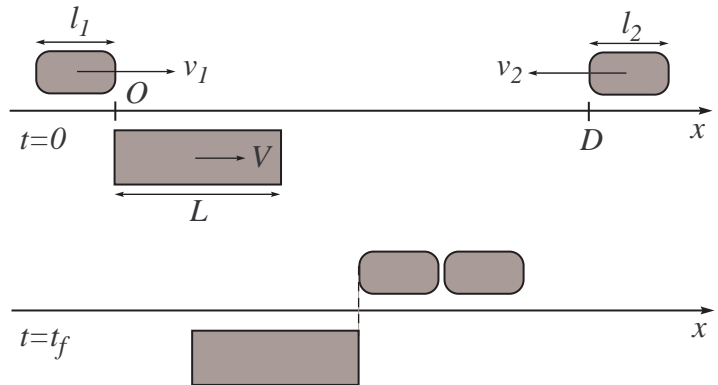


Solution Ex-M1.4

1.b) (la réponse c) n'est vraie que lorsqu'on exprime l'accélération dans la base cartésienne ; elle est fausse si on travaille dans la base polaire)); **2.a)** ; **3.b)** ; **4.c)**

Solution Ex-M1.11

Il est nécessaire de faire deux schémas de l'axe Ox où, sur le premier, on fait apparaître les positions des trois véhicules au début du dépassement (l'origine O étant l'avant de la voiture (1) coïncidant, à $t = 0$, avec l'arrière du bus qu'elle dépasse) et où, sur le second, on représente les positions des véhicules à la fin du dépassement dans la situation la plus critique, la voiture (1) se rabattant *in extremis*.



En utilisant les propriétés du mouvement rectiligne uniforme, on écrit les équations horaires des différents points : on note x_1 les abscisses relatives à la voiture qui double, x_2 celles relatives à la voiture qui arrive en face et X celle relatives au bus. On note l'indice AV pour l'avant d'un véhicule et AR pour l'arrière de ce véhicule.

$$\begin{cases} x_{1,AV} = v_1 t \\ x_{1,AR} = v_1 t - l_1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{AV} = Vt + L \\ X_{AR} = Vt \end{cases} \quad \begin{cases} x_{2,AV} = -v_2 t + D \\ x_{2,AR} = -v_2 t + D + l_2 \end{cases}$$

À la date t_f de la fin du dépassement, l'accident sera évité si :

$$\begin{cases} x_{1,AR} = X_{AV} \\ x_{1,AR} < x_{2,AV} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 t_f - l_1 = V t_f + L \\ v_1 t_f < -v_2 t_f + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_f = \frac{L + l_1}{v_1 - V} \\ D > \frac{v_1 + v_2}{v_1 - V} (L + l_1) = 240 \text{ m} \end{cases}$$

Solution Ex-M1.17

1) Condition de roulement sans glissement : $C_0C = \widetilde{OI} \iff vt = R\theta \iff v = R\dot{\theta} \equiv R\omega$.

2) $\overrightarrow{OC} \begin{cases} x_C = R\theta = R\omega t \\ z_C = R \end{cases}$ 3) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \begin{cases} x_C = R(\theta + \sin\theta) = R(\omega t + \sin\omega t) \\ z_C = R(1 + \cos\theta) = R(1 + \cos\omega t) \end{cases}$

4) $z(\theta)$ est une fonction périodique paire de période 2π et $x(\theta+2\pi) = x(\theta) + 2\pi R$: il suffit donc d'étudier x et z sur $\theta \in [0, 2\pi]$. Le reste de la courbe se déduisant par translation de $2\pi R$ selon (Ox) et par symétrie par rapport à Oz si on veut tracer $M(x(\theta), z(\theta))$ sur $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$.

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	
$x'(\theta)$	2R	\oplus	R	\oplus	R	
$x(\theta)$	0	$R(1+\pi/2)$		πR	$R(3\pi/2-1)$	
$z'(\theta)$	0	\ominus	-R	\ominus	0	\oplus
$z(\theta)$	2R	R		0	R	

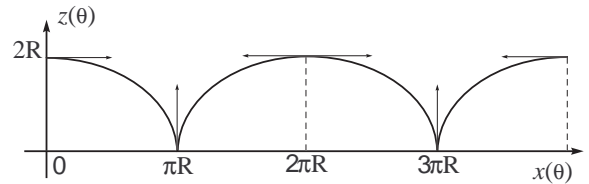
On étudie d'abord $\begin{cases} x'(\theta) = R(1 + \cos\theta) \\ z'(\theta) = -R\sin\theta \end{cases}$

On pose $\epsilon = \theta - \pi$ pour étudier la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta = \pi$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est : $p = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{z'(\theta)}{x'(\theta)}$

$$p = \frac{-R\sin(\pi + \epsilon)}{R(1 + \cos(\pi + \epsilon))} = \frac{\sin\epsilon}{1 - \cos\epsilon}$$

→ Donc $p(\theta = \pi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin\epsilon}{1 - \cos\epsilon} \simeq \frac{\epsilon}{\epsilon^2/2} = \frac{2}{\epsilon} \rightarrow \infty$: la tangente en $\theta = \pi$ [2 π] est verticale : on dit que la courbe présente un point de rebroussement en $\theta = \pi$.



5) $\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\omega(1 + \cos\omega t) \\ -R\omega\sin\omega t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\omega(1 + \cos\theta) \\ -R\omega\sin\theta \end{vmatrix}$

CI : L'hodographe du mouvement est donc un cercle de centre $(R\omega, 0)$ et de rayon $v = R\omega$.

De plus :

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = R^2\omega^2 \cdot 2(1 + \cos\omega t) = 4R^2\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

→ $v_M = 2R\omega \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$

6) $\vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} -R\omega^2 \sin\omega t \\ -R\omega^2 \cos\omega t \end{vmatrix} = -\omega^2 \begin{vmatrix} R \sin\theta \\ R \cos\theta \end{vmatrix}$

→ $\vec{a}_{M/R} = -\omega^2 \overrightarrow{CM}$

Soit : $a = \omega v = \frac{v^2}{R}$; A. N. : $a \approx 3,7 \cdot 10^3 m \cdot s^{-2}$.

7) Pour $\theta = \pi$: $\vec{v}_{M/R} = \vec{0}$ et $\vec{a}_{M/R} = R\omega^2 \vec{e}_z$.

