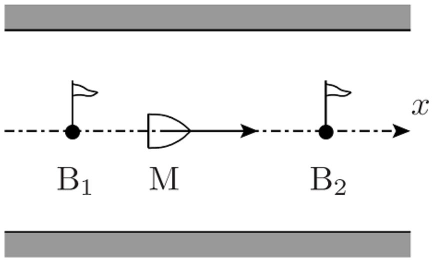
■ Changement de référentiels : aspect cinématique

Ex-M8.1 Aller-retour sur un fleuve



Deux bouées B_1 et B_2, distantes de l, sont situées sur un canal, dont le courant a pour vitesse uniforme $\overrightarrow{u}$ par rapport aux berges et s'écoule de B_1 vers B_2. Ces bouées sont fixes par rapport aux berges. Un rameur, assimilé à un point matériel M, effectue un aller-retour entre les deux bouées, sa vitesse par rapport au courant (à l'eau) gardant toujours la même norme égale à v telle que $v > u$.

1) Exprimer les vitesses $\overrightarrow{v_+}$ et $\overrightarrow{v_-}$ du rameur par rapport aux berges, respectivement au cours des trajets B_1 vers B_2 et B_2 vers B_1.

2) En déduire la durée τ de l'aller-retour du rameur entre les bouées.

3) Quelle est la durée τ' mise par un personne marchant sur les berges avec la même vitesse v que celle du rameur par rapport au courant, et qui effectue le même aller-retour entre les bouées ? Comparer les durées τ et τ' (on pourra faire le rapport).

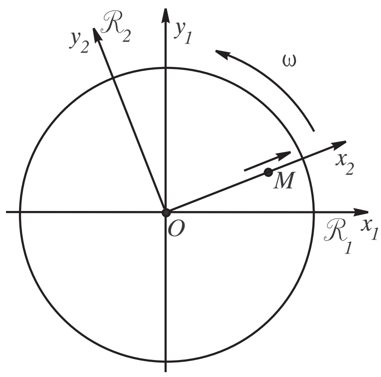
Rép : 1) $\overrightarrow{v_+} = (u+v)\,\overrightarrow{e_x}$; $\overrightarrow{v_-} = (u-v)\,\overrightarrow{e_x}$ **2)** $\tau = \frac{2lv}{v^2-u^2}$; **3)** $\tau' = \frac{2l}{v} < \tau$

Ex-M8.2 Traversée d'une rivière

Un nageur dont la vitesse par rapport à l'eau est v_1 traverse une rivière de largeur l en suivant une trajectoire perpendiculaire aux berges. Sachant que le courant a une vitesse v_0 uniforme, calculer le temps de la traversée.

Rép : Avant tout calcul, un schéma et la bonne compréhension des référentiels mis en jeu sont ici obligatoires. $\tau = \dfrac{l}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}$

Ex-M8.3 Mouvement radial sur un plateau tournant



Soit le plateau horizontal d'un four micro-onde avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe. $\mathcal{R}_1$ est le référentiel terrestre et $\mathcal{R}_2$ est lié au plateau.

Supposons qu'une fourmi M, égarée (...), survive suffisamment pour décrire à vitesse constante $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_2}}$ l'axe (Ox_2) lié à $\mathcal{R}_2$.

→ Exprimer $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}}$ et $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}}$ dans la base $(\overrightarrow{e_{x2}}, \overrightarrow{e_{y2}})$.

Rép : $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}} = v\,\overrightarrow{e_{x2}} + x_2\omega\,\overrightarrow{e_{y2}}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}} = -x_2\omega^2\,\overrightarrow{e_{x2}} + (2\omega v + x_2\dot{\omega})\,\overrightarrow{e_{y2}}$

Ex-M8.4 Manège d'enfants

Un manège d'enfants tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$. Le propriétaire parcourt la plate-forme (référentiel $\mathcal{R}'$ de repère cartésien $(\overrightarrow{e_x}', \overrightarrow{e_y}', \overrightarrow{e_z}')$) pour ramasser les tickets.
Partant du centre au temps $t = 0$ sans vitesse, il suit un rayon de la plate-forme (qui porte le vecteur $\overrightarrow{e_x}'$) avec un mouvement uniformément accéléré.

1) Établir les équations paramétriques de la trajectoire de l'homme :

1.a) Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au manège ($\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$).

1.b) Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol en utilisant les coordonnées polaire ($r = \ldots$ et $\theta = \ldots$), en supposant $\theta(t=0) = 0$.

2) Déterminer la vitesse absolue du mouvement de l'homme dans une base judicieusement choisie de $\mathcal{R}$:

2.a) en utilisant les lois de composition des mouvements.

2.b) à partir de l'équation paramétrique de la trajectoire.

3) Reprendre la question **2)** pour l'accélération absolue.

Rép : **1.a)** $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}at\,\overrightarrow{e_x}'$; **1.b)** $r = \frac{1}{2}at$; $\theta = \omega t$; **2)** $\overrightarrow{v_a} = at\overrightarrow{e_x}' + \frac{1}{2}a\omega t^2\overrightarrow{e_y}'$; **3)** $\overrightarrow{a_a} = \left(a - \frac{1}{2}a\omega^2 t^2\right)\overrightarrow{e_x}' + 2a\omega t\overrightarrow{e_y}'$

Ex-M8.5 **Vitesse en coordonnées cylindriques**

1) Quelle est la vitesse d'un point exprimée dans la base locale des coordonnées sphériques ?
2) Quel est le vecteur rotation du repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ par rapport au repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$?
En déduire une autre méthode de calcul de la vitesse précédente en utilisant les changements de référentiels.

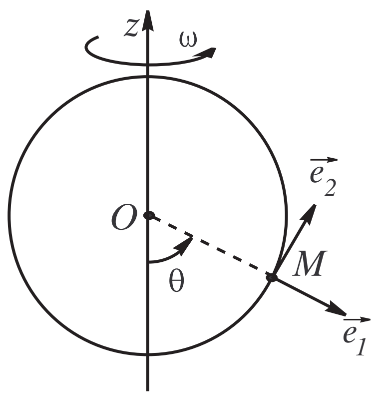
Rép : ➜ Cf Cours **M8.II.2.c)**, p. 4.

M9

■ Dynamique en référentiel non galiléen

Ex-M9.1 **Anneau coulissant sur un cercle en rotation (*, ➜ à voir !)**

Une circonférence de centre O et de rayon R située dans un plan vertical tourne autour d'un de ses diamètres d'un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire ω.
Un anneau M de masse m assimilable à un point matériel est mobile sans frottement sur cette circonférence.
On désigne par θ l'angle que fait OM avec la verticale ascendante.



I - Trouver l'équation du mouvement de M dans $\mathcal{R}$ référentiel tournant lié à la circonférence :
1) à partir de la relation fondamentale de la dynamique ;
2) à partir du théorème du moment cinétique ;
3) à partir de la puissance cinétique ;
4) à partir de la conservation de l'énergie mécanique (qui sera justifiée).
Vérifier qu'on obtient la même équation du mouvement avec les différentes méthodes.

II - On veut étudier l'équilibre relatif de M.
1) Écrire la relation $f(\theta) = 0$ donnant les positions d'équilibre dans $\mathcal{R}$.
2) Déterminer les positions d'équilibre.
3) Étudier la stabilité des différentes positions.

III - On veut que l'équilibre stable corresponde à $30°$.
Quelle devra être la vitesse angulaire si $R = 0,2\ m$ et $g = 10\ m.s^{-2}$? Calculer la période des petits mouvements autour de cette position.

IV - Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle (dans Rréférentiel lié à la circonférence).
En déduire la nature du mouvement possible (oscillations ou révolutions) suivant la valeur de l'énergie mécanique du point matériel.

Rép : **I)** $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta + \dfrac{g}{R}\sin\theta = 0$

II.1) Il s'agit, bien entendu, de la condition d'équilibre pour ce système conservatif : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)(\theta_{\text{eq}}) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta(g - \omega^2 R\cos\theta) = 0$ puisque $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,g} + \mathcal{E}_{p,ie} = -mgR\cos\theta - \dfrac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta$; **II.2)** $\theta_{\text{eq1}} = 0$, $\theta_{\text{eq2}} = \pi$ et deux autres possibilités, dans le seul cas où $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$: $\theta_{\text{eq3}} = \arccos\dfrac{g}{R\omega^2}$ et $\theta_{\text{eq4}} = -\theta_{\text{eq3}}$; **II.3)** Déterminer le signe de $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)(\theta_{\text{eq}})$. En déduire le caractère instable ou stable de chaque position d'équilibre.

III) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{R\sqrt{3}}} \simeq 7,6\ rad.s^{-1}$. Puisqu'on se place dans la situation où $\theta_{\text{eq}} = \theta_{\text{eq3}}$ est un équilibre stable, un petit écart φ depuis cette position d'équilibre va être régi par une équation de la forme $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{2\pi}{T_0}$, d'où $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R\sqrt{3}}{g}} \simeq 1,65s$.

Ex-M9.2 Une tige horizontale AB de longueur l est solidaire d'un axe vertical (Δ) qui tourne avec la vitesse angulaire ω constante. Un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel peut glisser sans frottements sur la tige AB. Il est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige (à une date prise comme origine des temps) en I milieu de AB.

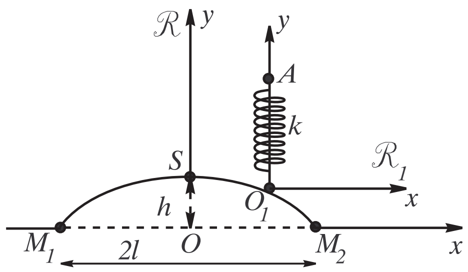
1) Étudier le mouvement de M dans le référentiel du système tournant.

2) À quelle date et avec quelle vitesse arrive-t-il à l'extrémité de la tige ?

3) Donner l'expression de la réaction de la tige sur l'anneau au point B juste avant la chute.

Rép : 1) en appelant (Ox') la direction de la tige : $OM = x' = \frac{l}{2}\text{ch}\,\omega t$; **2)** $t_1 = \frac{1}{\omega}\text{arcch}\,2$; $v_B = \frac{l\omega}{2}\sqrt{3}$; **3)** $R_{(M=B)} = m\sqrt{g^2 + 3l^2\omega^4}$.

Ex-M9.3 **Mouvement d'un point matériel dans un véhicule accéléré (*)**



Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}$ sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$.
On lui associe un référentiel $\mathcal{R}_1$ (O_1xyz, t) en translation par rapport au référentiel terrestre R$(Oxyz, t)$.
Un point matériel A, de masse m, lié à l'origine O_1 par un ressort de raideur k, de longueur naturelle l_0, évolue le long de l'axe (O_1y).

1) Montrer que la composante cartésienne, suivant la verticale ascendante (Oy), de l'accélération de O_1 dans $\mathcal{R}$ s'écrit $\dfrac{v^2f''}{(f'^2+1)^2}$, f' et f'' désignant les dérivées première et seconde de f par rapport à x.

2) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement de A dans $\mathcal{R}_1$.

3) Calculer la tension $\overrightarrow{T}$ du ressort dans le cas où, grâce à une force supplémentaire de frottement visqueux, A acquiert rapidement une position d'équilibre dans $\mathcal{R}_1$. Comparer alors $\overrightarrow{T}$ au poids, dans les cas où la route forme une bosse ou un creux. Conclure, en utilisant la notion de poids apparent.

4) Le profil de la route forme une bosse assimilable à un arc de parabole, M_1SM_2, dont les caractéristique sont données sur la figure ci-jointe. Pour quelle valeur de la vitesse y-a-t-il impesanteur pour A en S ?

Rép : 1) $v_{O_1/\mathcal{R}_T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ avec $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'\dot{x} \ \rightarrow \dots \rightarrow \ \ddot{y} = \dfrac{v^2f''}{(1+f'^2)^2}$; **2)** $m\overrightarrow{a_{A/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{F_{\text{élas}}} + m\overrightarrow{g} - m\overrightarrow{a_e}(M)$; **3)** $T = mg + \frac{mv^2f''}{(1+f'^2)^2}$; **4)** $v = l\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Ex-M9.4 **Pendule 'simple'**

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m, placé à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur l (et de masse négligeable). L'autre extérmité du fil est fixée en O'.
O' oscille sinusoïdalement suivant la verticale, avec une amplitude D_m et une pulsation ω :

$$\overrightarrow{OO'} = D_m \cos\omega t\, \overrightarrow{e_x}$$

On désigne par θ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante (Ox), de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements. On note $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le repère associé au référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le repère lié au support du pendule.

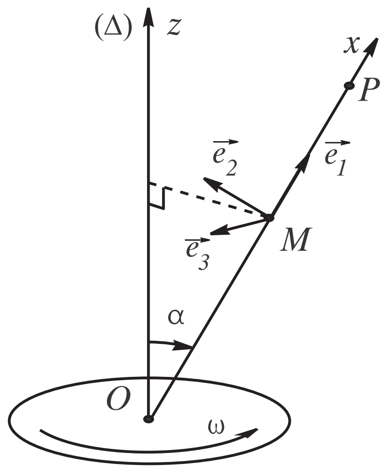
1) $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ?

2) Écrire l'expression du théorème du moment cinétique en O'.

3) En déduire que l'équation différentielle du mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t)) \sin\theta = 0$ où $h(t)$ est une fonction du temps à préciser.

Rép : 3) $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{D_m\omega^2}{g}\cos\omega t\right)\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t))\sin\theta$.

Ex-M9.5 Anneau sur une tige en rotation autour d'un axe fixe



Une tige OP de longueur l est fixée au point O à un axe vertical (Δ) avec lequel elle fait un angle α constant. Un petit anneau de masse m considéré comme ponctuel peut se déplacer sans frottement sur la tige OP. Soit M sa position définie par $OM = x$.

L'ensemble est en rotation uniforme autour de l'axe (Δ) à la vitesse angulaire ω.

1) Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre x_e de l'anneau sur la tige OP que si la vitesse angulaire de rotation est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.

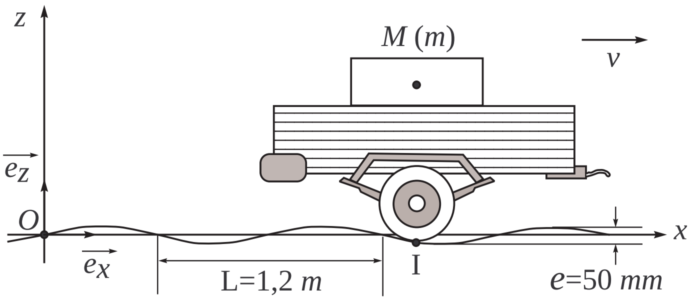
2) Préciser la position de l'anneau pour une vitesse $\omega_1 \geq \omega_0$.

3) Si l'on écarte légèrement l'anneau de cette position lorsqu'elle existe, que se passe-t-il ? Étudier la stabilité de l'équilibre.

Rép : 1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l\sin^2\alpha}}$; **2)** $x_1 = \frac{g\cos\alpha}{\omega_1^2\sin^2\alpha}$; **3) P.F.D.** dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la tige en projection selon Ox : $\ddot{x} - \omega_1^2\sin\alpha\, x = -g\cos\alpha$, de solution $x(t) = x_P + x_G = x_1 + A\exp(-\lambda t) + B\exp(\lambda t)$ avec $\lambda = \sqrt{\omega^2\sin\alpha}$. Comme $x(t) \to \infty$ lorsque $t \nearrow$, l'équilibre est instable.

Ex-M9.6 Une remorque sur une route bosselée

On suppose le référentiel lié au sol terrestre galiléen. On étudie un objet M de masse m posé sur le plateau d'une remorque. La remorque se déplace à une vitesse horizontale $v = cste$ sur une route de profil sinusoïdal.



On suppose les amortisseurs et les pneus de la remorques infiniment rigides.

→ Déterminer la vitesse v à partir de laquelle l'objet ne reste plus tout le temps en contact avec le plateau de la remorque.

Méthode et indications pour résoudre ce problème :

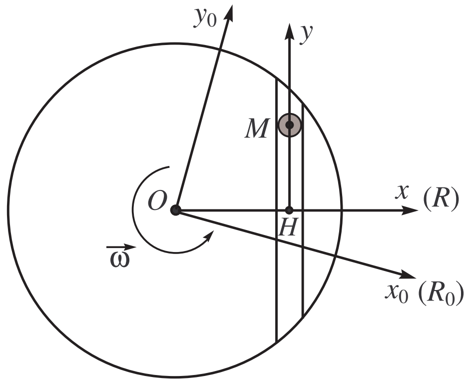
- faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur $\mathcal{S} = \{M, m\}$ dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la remorque
- en particulier, montrer que $\overrightarrow{F_{ie}}(M) = -m\ddot{z}_I\,\vec{e_z}$, avec z_I, l'altitude de I, point géométrique lié à $\mathcal{R}_1$ qui coïncide avec le point de la remorque en contact avec le sol
- exprimer $z_I(t)$ en fonction de e, x et L ; en déduire que $\ddot{z}_I = -\left(\frac{2\pi v}{L}\right)^2 z_I(t)$
- exprimer le **P.F.D.** pour M dans $\mathcal{R}_1$ et en déduire l'expression de la réaction de la remorque sur M en fonction de m, g et $\ddot{z}_I$
- quelle est la condition sur R qui traduit le contact de M avec la remorque ?
- en déduire qu'il y a décollement dès que $\ddot{z}_{I,\min} < -g$; en déduire v.

Rép : $v = \sqrt{\frac{g}{2e}}\cdot\frac{L}{\pi}$

Ex-M9.7 Bille et astéroïde

À l'aide du théorème de Gauss, on montre que le champ de gravitation en un point intérieur M d'un astéroïde sphérique homogène, de masse volumique ρ a pour expression :

$$\overrightarrow{G}(M) = -\frac{4}{3}\pi.\rho.\overrightarrow{OM}$$



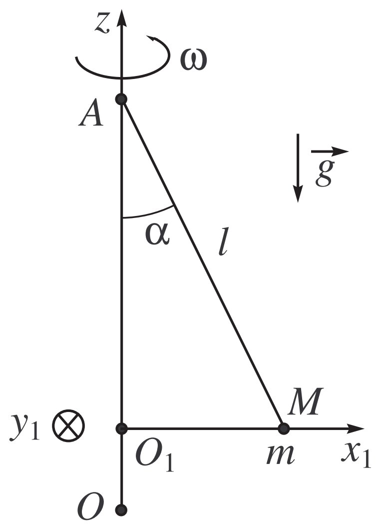
Un tel astéroïde est assujetti à tourner autour d'un de ses diamètres avec la vitesse angulaire ω constante.
Une cavité cylindrique de petite dimension et qui ne perturbe pas la gravitation est creusée dans le plan équatorial (par rapport à l'axe de rotation) à a distance $OH = a$ du centre O.
On abandonne à l'une de ses extrémités un objet M quasiment ponctuel de masse m qui peut glisser sans frottement dans cette cavité.
Données : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ $u.S.I.$; $\rho = 2,7.10^3$ $kg.m^{-3}$.

1) Donner la nature du mouvement de l'objet sachant que la période de révolution de l'astéroïde sur lui-même est $T = 10$ h.

2) Calculer la période T_0 du mouvement de la masse dans la cavité.

3) Quelle devrait être la masse volumique ρ de l'astéroïde pour que l'objet placé à l'entrée de la cavité y reste en équilibre, la période de rotation T n'ayant pas changé.

Ex-M9.8 Pendule conique



Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ (O, x, y, z, t) supposé galiléen, un pendule conique est constitué d'une masse ponctuelle m fixée à un fil de masse négligeable et de longueur l dont l'extrémité supérieure A est fixe et située sur l'axe vertical (Oz).
Le pendule est astreint à tourner autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω : le fil est alors incliné d'un angle α constant par rapport à (Oz).
On note M la position de m à la date t.
Soit $\mathcal{R}_1$ le référentiel (O_1, x_l, y_1, z, t) lié au pendule tel que M soit toujours sur l'axe (O_1x_1). L'étude sera menée dans ce référentiel.

1) Exprimer les forces d'inertie $\overrightarrow{F_{ie}}$ et $\overrightarrow{F_{iC}}$ dans la base $(\overrightarrow{e_{x_1}}, \overrightarrow{e_{y_1}}, \overrightarrow{e_z})$.

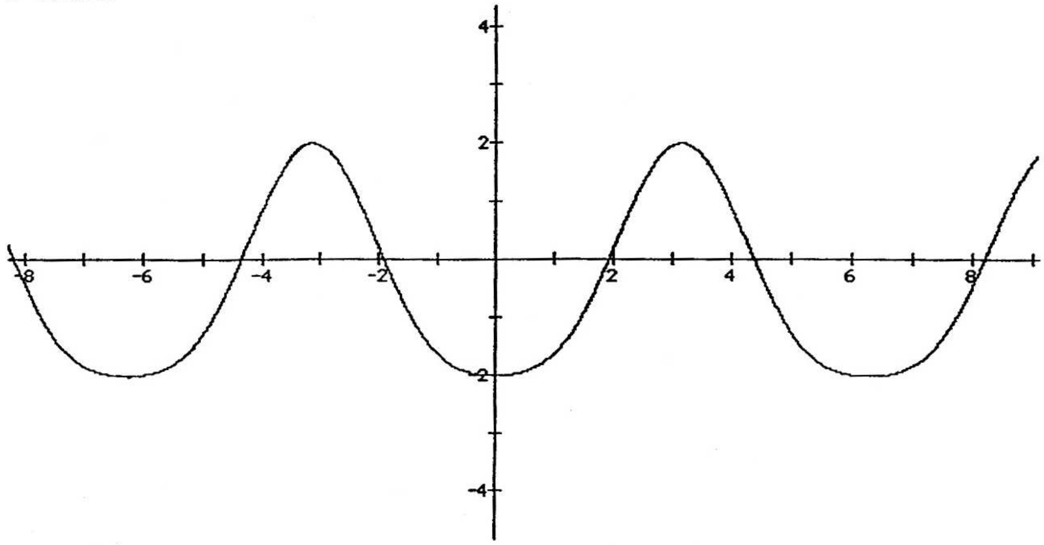
2) Montrer que l'inclinaison du pendule n'est observée que si ω est supérieure à une certaine valeur ω_{min} que l'on déterminera en fonction de g et l.
Dans le cas où $\omega > w_{\text{min}}$, déterminer l'expression de α en fonction de g, l et ω.

3) Quelle serait la nouvelle expression α' de l'angle si ce pendule était situé dans un ascenseur en mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\overrightarrow{a} = a.\overrightarrow{e_z}$, par rapport à $\mathcal{R}$ $(a > 0)$?

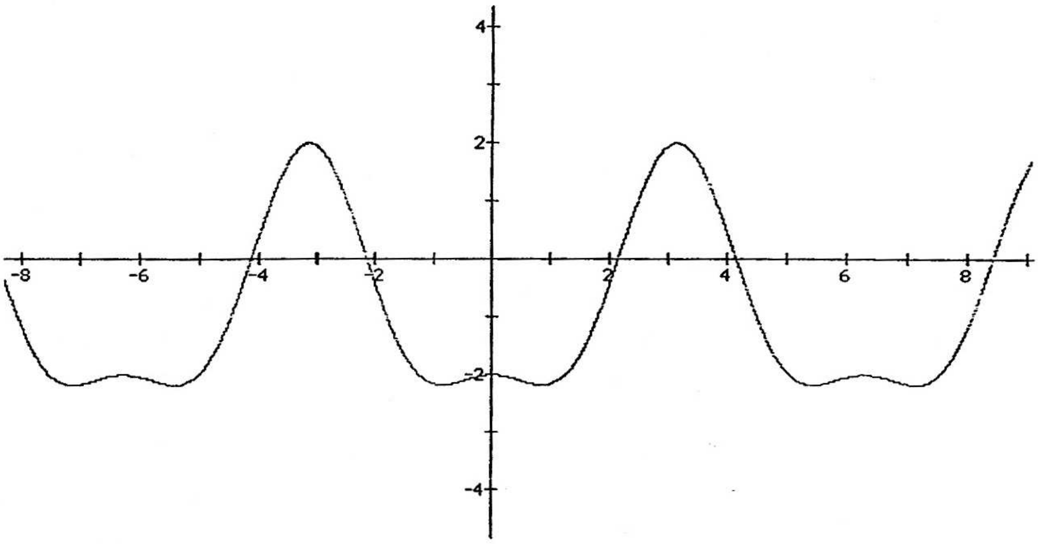
Complément Ex-M9.1

Profils d'énergie potentielle

$\omega = 3{,}8\ \mathrm{rad.s^{-1}}$



$\omega = 7{,}6\ \mathrm{rad.s^{-1}}$



$\omega = 15{,}2\ \mathrm{rad.s^{-1}}$