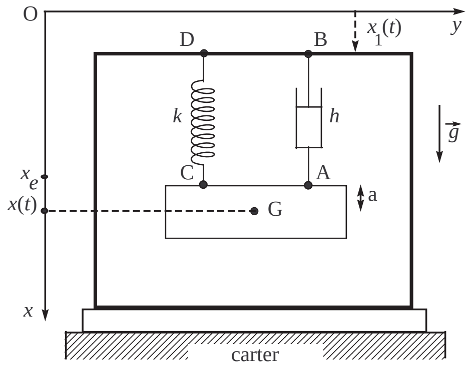
M5

■ Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

Ex-M5.1 Sismographe

on considère un capteur d'amplitude constitué par un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle.
L'amortisseur exerce en A : $\overrightarrow{F_A} = -h\,(\overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B})$
et le ressort exerce en C : $\overrightarrow{T_C} = -k\,(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_0C_0})$.
Le support, le ressort et l'amortisseur sont de masse négligeable.
Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide l_0 (notée D_0C_0).



On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine animée d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b\sin\omega t$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ ((Oxy) étant lié à $\mathcal{R}_0$).
1) Déterminer l'équation que vérifie x_e (position de la masse à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ lorsque $x_1 = 0$).
2) Écrire l'équation différentielle du mouvement de m dans $\mathcal{R}_0$.
Si on pose $X = x - x_1 - x_e$, montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\sin\omega t \qquad \star$$

Résoudre cette équation. (Principe du sismographe.)

Rép : 1) Écrire, pour la masse m, le **P.F.D.** à l'équilibre ① $\rightarrow$ $x_e = l_0 + \dfrac{mg}{k} + a$
2) Écrire le **P.F.D.** hors équilibre ②; ② − ① $\rightarrow$ $m\ddot{x} = -k(x(t) + x_1 - x_e) - h(\dot{x} - \dot{x}_1)$.
D'où $\star$ avec $A = b\omega^2$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$, de solution $X(t) = X_m\sin(\omega t + \varphi)$, avec $X_m = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$. Au final : $x(t) = X(t) + x_1(t) + x_e$.

Ex-M5.2 Déphasage de la vitesse par rapport à la force excitatrice

Soit $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t)$ l'équation du mouvement d'un oscillateur soumis à une force excitatrice $f(t) = F_m\cos(\omega t + \psi)$.
$\rightarrow$ Calculer, en régime forcé :
1) le déphasage φ_v de la vitesse $v(t)$ par rapport à la force ; en particulier, montrer que :

$$\sin\varphi_v = \frac{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)V_m}{\dfrac{F_m}{m}} \quad \text{et} \quad \cos\varphi_v = \frac{2\alpha V_m}{\dfrac{F_m}{m}}$$

(Que représentent ω_0, V_m et α ?)
2) la travail $\mathcal{T}$ fourni à chaque période T, par la force à l'oscillateur.

Rép : 2) Partir du travail élémentaire fourni par le force excitatrice : $\delta\mathcal{T} = f(t).\mathrm{d}x = f(t).v(t)\mathrm{d}t = F_m\cos(\omega t + \psi).V_m\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \dfrac{F_mV_m}{2}[\cos(\psi - \varphi) + \cos(2\omega t + \psi + \varphi)]\mathrm{d}t$.
Sur une période $\mathcal{T} = \displaystyle\int_0^T \delta\mathcal{T}\ \ldots \rightarrow \mathcal{T} = \dfrac{hV_m^2}{2}T$

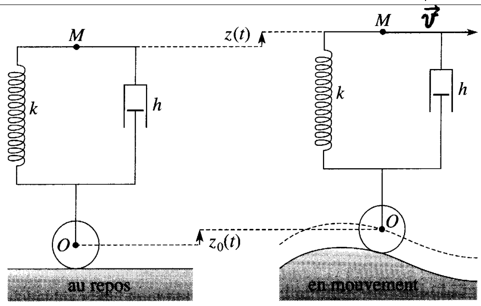
Ex-M5.3 Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée

Une automobile est sommairement modélisée par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h. En routes circonstances, l'axe OM reste vertical.
On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v sur une route

dont le profil impose au centre O de la roue une élongation

$$z_O(t) = a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

par rapport à sa position d'équilibre.
On repère le mouvement de la masse par son élongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos.



On rappelle qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O : $\overrightarrow{F_r} = -h(\dot{z}_M - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$.

1) Établir l'équation différentielle en *z(t)* du mouvement de la masse , lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v.

2) Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.

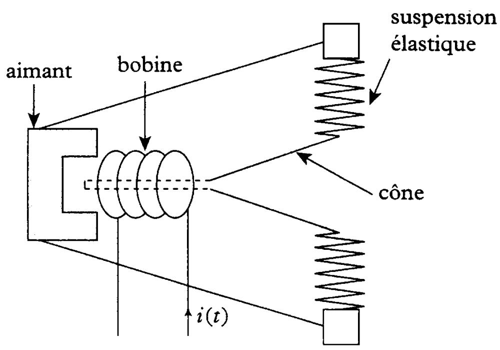
3) À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

Rép : 1) $m\ddot{z} = -k(z(t) - z_O(t)) - h(\dot{z} - \dot{z}_O)$, avec $z_O = a\cos(\omega t)$, comme $x = v.t$ et en posant $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$; $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_O(t) + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z}_O(t)$, en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$; **2)**

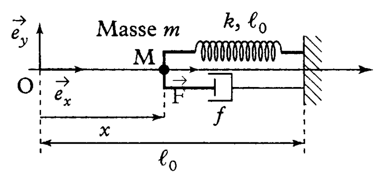
$$Z_m = \frac{a\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

Ex-M5.4 Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$. Cette masse m, assimilée à un point matériel M (m), est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f. Elle est soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur.
On a : $F(t) = K\,i(t)\,\overrightarrow{e_x}$, avec K une constante.
On travaille dans le référentiel terrestre considéré galiléen $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
On suppose que le courant $i(t)$ est sinusoïdal : $i(t) = I_m\cos(\omega t)$
Données : $m = 10\,g$; $k = 15\,000\,N.m^{-1}$; $K = 200\,N.A^{-1}$ et $I_m = 1\,A$.



Modèle mécanique



1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m.

2) La normaliser. On veut $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Calculer alors la valeur du cœfficient f.

3) Déterminer l'expression de la réponse forcée $x(t)$ et la mettre sous la forme $X_m\cos(\omega t + \varphi)$.
Donnée : $\omega = 6\,280\,rad.s^{-1}$

4) Tracer l'allure de la courbe donnant $\omega \to X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.

Rép : 1) $\ddot{x} + \dfrac{f}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{K}{m}I_m\cos(\omega t)$; **2)** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{f} = \dfrac{\sqrt{km}}{f}$
A.N. : $f \simeq 17{,}3\,kg.s^{-1}$ (ou $N.s.m^{-1}$) ; **3)** $\omega_0 \simeq 1\,225\,rad.s^{-1}$, $\omega = 6\,280\,rad.s^{-1}$, $X_m = 0{,}5\,mm$ et $\varphi = -164° = -2{,}86\,rad$, soit : $x(t) = 0{,}5.10^{-3}\cos(6\,280t - 2{,}86)$ (en m) ;
4) $X_m(\omega_c) = \dfrac{KI_m}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_c^4}{\omega_0^4}}} = \dfrac{X_m(\text{max})}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0$

Ex-M5.5 **Pourquoi le ciel est-il bleu ?**

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome ; $\overrightarrow{F_e} = -k\,\overrightarrow{OM}$). Nous supposerons que ce électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnelle à sa vitesse $\overrightarrow{F_r} = -h\,\overrightarrow{v}$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique $\overrightarrow{E}(t) = E_0\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$, de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de Thomson.

6 Données : $m = 9,1.10^{-31}\,kg$; $e = 1,6.10^{-19}\,C$; $k = 100\,N.m^{-1}$; $h = 10^{-20}\,kg.s^{-1}$.

1) Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser. (« la normaliser »= comprendre qu'il faut l'écrire sous sa forme « canonique »).

2) Déterminer le régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle).

3) Simplifier l'expression précédente sachant que le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'onde s'étendant de $\lambda_b = 400\,nm$ (bleu) à $\lambda_r = 800\,nm$ (rouge), longueurs d'onde du champ $\overrightarrow{E}(t)$.

4) Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Rép : 1) $\ddot{\overrightarrow{OM}} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\overrightarrow{OM}} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = -\dfrac{e}{m}\overrightarrow{E}(t)$, avec $\omega_0 = \sqrt{km}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$; **2)** $\overrightarrow{OM}(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}$, avec $X_m = \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$;

3) $\lambda_{b/r} = \dfrac{2\pi c}{\omega_{b/r}}$ (➜ Cf Cours **O1.I.1.a)** : $\lambda = c.T = c.\dfrac{2\pi}{\omega}$), comparer les valeurs de ω_b, ω_r avec celle de ω_0, en déduire : $X_m \simeq \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}$ et $\varphi \simeq \pi$; **4)** Comme $\ddot{\overrightarrow{OM}} \simeq \dfrac{e\omega^2}{m\omega_0^2}E_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$, on a $<\mathcal{P}_{b/r}>= K \times (\text{amplitude de l'accélération})^2 = K\left(\dfrac{e\omega_{b/r}^2}{m\omega_0^2}E_0\right)^2$, soit $\dfrac{<\mathcal{P}_b>}{<\mathcal{P}_r>} = \left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 = 16$.