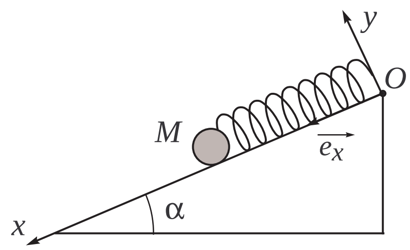
■ Oscillateur harmonique en régime libre

Ex-M4.1 Ressort incliné

Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O d'un plan incliné et à un point matériel M de masse m.
Nous posons $\overline{OM} = x$ et nous supposons qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.

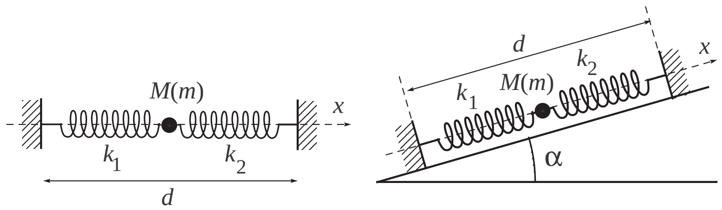


1) Déterminer x_e à l'équilibre.
2) À partir de la position d'équilibre, M est déplacé de D et relâché sans vitesse initiale. Exprimer x en fonction de t.

Rép : 1) $x_e = l_0 + \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$; **2)** $x(t) = x_e + D\cos\omega_0 t$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Ex-M4.2 Deux oscillateurs

Une masse m est susceptible de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Elle est soumise à l'action de 2 ressorts de même longueur à vide $l_0 = 20\ cm$ et de constantes de raideur différentes k_1 et k_2.

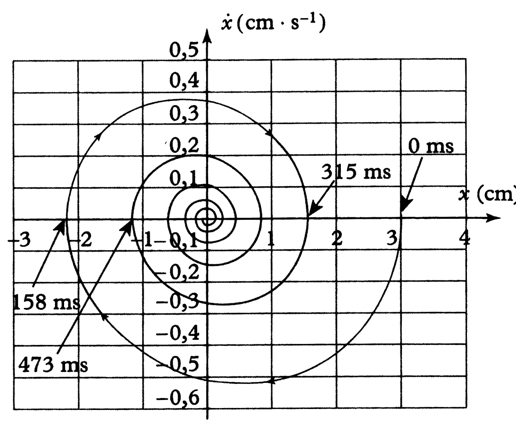


On donne : $m = 4\ kg$; $k_1 = 100\ N.m^{-1}$; $k_2 = 300\ N.m^{-1}$ et $d = 60\ cm$.
1) Déterminer les longueurs des 2 ressorts à l'équilibre.
2) On écarte la masse m d'une distance a_0 à partir de sa position d'équilibre. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en prenant la position d'équilibre comme origine des abscisses. Calculer la périodes des oscillations. Donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse.
3) Les ressorts sont tendus le long d'un plan incliné de $\alpha = 30°$ avec l'horizontale → Mêmes questions.

Rép : $l_1 = \dfrac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d}{k_1 k_2} = 35\ cm$ et $l_2 = d - l_1 = 25\ cm$; **2)** $\ddot{X} + \dfrac{k_1 + k_2}{m}X = 0$ avec $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$ et $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2)a_0^2$; **3)** $l_1 = \dfrac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d - mg\sin\alpha}{k_1 k_2} = 34,95\ cm$ et $l_2 = d - l_1 = 25,05\ cm$; pour le reste, les résultats sont identiques à la situation précédente !

Ex-M4.3 Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti

On considère le portrait de phase d'un oscillateur amorti composé d'une masse $m = 500\,g$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse de la masse m et x est l'écart à la position d'équilibre). – L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.



1) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.
2) Déterminer par lecture graphique :
∘ la valeur initiale de la position x_0 ;
∘ la valeur finale de la position x_f ;
∘ la pseudo-période T_a ;
∘ le décrément logarithmique.
3) En déduire le facteur de qualité Q de l'oscillateur, sa période propre ω_0, la raideur k du ressort et le cœfficient de frottement fluide λ. Applications numériques pour ces quatre grandeurs.

Rép : 2) $\delta = \ln\dfrac{x(t)}{x(t + T_a)}$: choisir la date t qui permet de déterminer à la fois $x(t)$ et $x(t+T_a)$,

$\delta \simeq 0,628$; **3)** $Q = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{\delta^2} + \dfrac{1}{4}}$; k s'exprime en fonction de m et de ω_0 ; λ s'exprime en fonction de m, ω_0 et de Q.

Ex-M4.4 Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = 100\ rad.s^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = 10$; la masse $m = 100\ g$ de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de $x_0 = 10\ cm$ sans vitesse initiale.

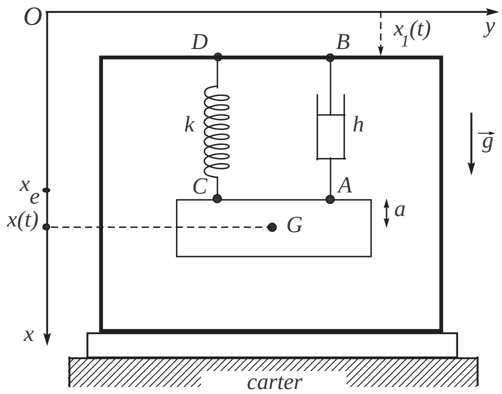
1) Calculer : **a)** la pseudo-période ; **b)** le décrément logarithmique ; **c)** l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes ; **d)** l'énergie mécanique initiale ; **e)** l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes.

2) Déterminer le nombre de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisées par 17.

Rép : 1.a) $T \simeq 62,9\ ms$; **1.b)** $\delta \simeq 0,314$; **1.c)** $x_2 \simeq 5,34\ cm$, $x_5 \simeq 2,08\ cm$, $x_{10} \simeq 0,43\ cm$; **1.d)** $\mathcal{E}_m(t=0) = 5\ J$; **1.e)** $\mathcal{E}_m(t=2T) \simeq 1,42\ J$, $\mathcal{E}_m(t=5T) \simeq 0,22\ J$, $\mathcal{E}_m(t=10T) \simeq 0,01\ J$; **2)** $n = 9$.

Ex-M4.5 Sismographe

on considère un capteur d'amplitude constitué par un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle.
L'amortisseur exerce en A : $\overrightarrow{F_A} = -h\,(\overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B})$ et le ressort exerce en C : $\overrightarrow{T_C} = -k\,(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_0C_0})$.
Le support, le ressort et l'amortisseur sont de masse négligeable.
Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide l_0 (notée D_0C_0).
On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine animée d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b\sin\omega t$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ ((Oxy) étant lié à $\mathcal{R}_0$).



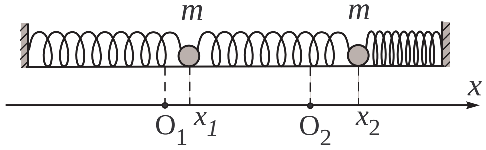
1) Déterminer l'équation que vérifie x_e (position de la masse à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ lorsque $x_1 = 0$).

2) Écrire l'équation différentielle du mouvement de m dans $\mathcal{R}_0$.
Si on pose $X = x - x_1 - x_e$, montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\sin\omega t.$$

Résoudre cette équation. (Rque : ceci est le principe du sismographe.)

Ex-M4.6 Système de deux oscillateurs couplés (*)



On considère le système suivant où les rois ressorts sont identiques et de constante de raideurs k. Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1 et x_2 à partir des positions d'équilibre O_1 et O_2, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus (ils sont alors àu repos').
On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m} et x_{2m} sans vitesse initiale.

1) Écrire les équations différentielles du mouvement des deux masses.

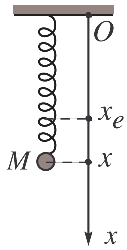
2) En posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, chercher à quelle condition portant sur ω il est possible d'avoir des solutions de la forme : $x_1 = a_1\cos(\omega t + \varphi)$ et $x_2 = a_2\cos(\omega t + \varphi)$?

3) En déduire les deux pulsations propres possibles pour le système et écrire la solution générale du mouvement des deux masses.

4) Quelles sont les solutions $x_1(t)$et $x_2(t)$ du problème ? En déduire les conditions sur x_{1m} et x_{2m} pour que les mouvements des deux masses soient harmoniques et décrire ces mouvements.

Rép : 1) $m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = kx_2$ et $m\ddot{x}_2 + 2kx_2 = kx_1$; **2)** $(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega_0^4$; **3)** $\omega = \omega_0$ ou $\omega = \sqrt{3}\omega_0$; **4)** $x_1(t) = \dfrac{x_{1m} + x_{2m}}{2}\cos(\omega_0 t) + \dfrac{x_{1m} - x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$ et $x_2(t) = \dfrac{x_{1m} + x_{2m}}{2}\cos(\omega_0 t) - \dfrac{x_{1m} - x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$ – Pour que les mouvements soient harmoniques, soit $x_{1m} = x_{2m}$, soit $x_{1m} = -x_{2m}$.

Ex-M4.7 Ressort vertical soumis à des forces de frottements fluide (*)



Une sphère de rayon r faible, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ et plongée dans un liquide de cœfficient de viscosité η est soumise à une force de frottement qui a pour expression : $\overrightarrow{f} = -6\pi.\eta.r.\overrightarrow{v}$ (loi de Stockes).
Unje telle sphère de masse volumique ρ est suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.
La période des oscillations libres dans l'air est T_0 (on néglige le frottement et la poussée d'Archimède **dans l'air**). Si l'on plonge cette sphère dans un liquide de masse volumique $\rho_e < \rho$, la pseudo-période des oscillations est T (dans ce cas, on ne néglige ni le frottement ni la poussée d'Archimède **dûs au liquide** sur la sphère).
1) Retrouver l'expression de la période T_0 en fonction des grandeurs k, ρ et r.
2) Lorsque la sphère est plongée dans le liquide, déterminer la longueur x_e du ressort à l'équilibre.
3) On écarte la sphère de sa position à l'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Soit x la longueur du ressort à la date t. Donner l'équation différentielle vérifiée par x, puis la simplifier en posant $X = x - x_e$.
4) À quelle condition sur k le régime est-il pseudo-sinusoïdal ? En déduire alors la pseudo-période T_1.
5) Montrer comment, à partir de la mesure de T_0 et de T_1, et sans connaître k, on peut en déduire le cœfficient de viscosité η du liquide. Donner la dimension de η.

Rép : 1) $T_0 = 4\pi\sqrt{\dfrac{\pi r^3\rho}{3k}}$; **2)** $x_e = l_0 + \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi r^3 g}{k}(\rho - \rho_e)$; **3)** $\ddot{X} + \dfrac{9\eta}{2r^2\rho}\dot{X} + \dfrac{3k}{4\pi r^3\rho}X = 0$; **4)** $T_1 = \dfrac{4\pi}{\sqrt{\dfrac{3k}{\pi r^3\rho} - \dfrac{81\eta^2}{4r^4\rho^2}}}$; **5)** $\eta = \dfrac{8\pi r^2\rho}{9}\sqrt{\dfrac{1}{T_0^2} - \dfrac{1}{T_1^2}}$

Ex-M4.8 Oscillateur harmonique spatial isotrope

Il s'agit d'une particule M, de masse m, élastiquement liée à un point fixe O (origine d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$) par une force $\overrightarrow{F}$ du type $\overrightarrow{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$, k étant la constante de raideur.
Le mouvement de M a lieu dans le plan (Oxy), avec les conditions initiales suivantes :

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0\,\overrightarrow{e_x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$$

1) On néglige tout frottement de type fluide et on pose $\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
→ Quelles sont les équations paramétriques de la trajectoire du point M ?
→ En déduire l'équation cartésienne de cette trajectoire et représenter l'allure de cette trajectoire en précisant le sens de parcours.
2) On ne néglige plus le frottement fluide exercé sur le point M au cours du mouvement. À présent, le point M est soumis à l'action des forces $\overrightarrow{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{f} = -\alpha\,\overrightarrow{v}$, α étant le cœfficient de frottement.
On suppose toujours que $\overrightarrow{OM_0} = x_0\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$. Le point M se déplace dans le plan (Oxy).
→ Déterminer la loi de variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le cas où $\alpha = 2m\omega_0$.
→ Représenter l'allure de cette trajectoire en précisant le sens de parcours.