

# ■ M4 ■ Oscillateur harmonique

## I Modèle de l'oscillateur harmonique (O.H.)

I.1 Exemples → Cf Cours

I.2 Définition

◇ **Définition** : Un **oscillateur harmonique** à un degré de liberté  $x (X, \theta, \dots)$  est un système physique dont l'évolution au cours du temps en l'absence d'amortissement et d'excitation, est régie par l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{OH}) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre.}$$

**Rq** : On rencontrera cette situation en électricité pour un circuit série contenant une inductance  $L$ , une capacité  $C$  et une résistance  $R$ .

En *régime libre*, c'est à dire sans excitation, et en l'absence d'amortissement ( $R = 0$ ), la charge  $q$  aux bornes du condensateur vérifie :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad \rightarrow \text{Cf Cours Elec}$$

L'importance du concept d'oscillateur harmonique vient de ce qu'il décrit le comportement général d'un système à un degré de liberté *au voisinage d'une position d'équilibre stable*.

Donc, le modèle de l'oscillateur harmonique est très utile pour un problème **unidimensionnel** et une force **conservative** qui ne dépend que d'une variable  $x$  (→ Cf Cours M3)

### I.3 Description du mouvement de l'oscillateur harmonique

- La solution générale de l'équation différentielle est :  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , avec :
  - $\omega_0$  **la pulsation propre** du mouvement (en  $rad.s^{-1}$ ),
  - $X_m$  **l'amplitude**,
  - $\varphi$  **la phase** (à l'origine des temps).
- $X_m$  et  $\varphi$  sont déterminés à partir des **conditions initiales (C.I.)** :
  - a)  $x(t = 0) = X_m \cos \varphi = x_0$
  - b)  $\dot{x}(t = 0) = -X_m \omega_0 \sin \varphi = \dot{x}_0 = v_0$ .

◇ **Définition** : Les oscillations d'un oscillateur harmonique sont purement sinusoïdales et **la période propre** des oscillations est :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Lorsque  $T_0$  ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, on dit qu'il y a **isochronisme** des oscillations.

**Rq** : On peut encore écrire  $x = X_m \cos \varphi \cos \omega_0 t - X_m \sin \varphi \sin \omega_0 t$  ou encore

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer par les conditions initiales. Cette relation est parfois pratique. En tenant compte des **C.I.** :

$$A = X_m \cos \varphi = x_0 \quad \text{et} \quad B = -X_m \sin \varphi = +\frac{v_0}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Et donc : } \begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \text{et } \tan \varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases} \quad \text{avec } \cos \varphi \text{ du signe de } x_0.$$

#### I.4 Énergie(s) de l'oscillateur harmonique

◇ **Définition** : (→ Cf Cours M3)

L'Oscillateur Harmonique à un degré de liberté  $x$  évolue dans un **puits parabolique**

**d'énergie potentielle** :  $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2}kx^2$

Ceci revient à dire que l'Oscillateur Harmonique est soumis à une **force conservative** :

$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -kx$$

**Cas du ressort vertical (cf. I.1) :**

• Grâce à cette expression de  $F(x)$ , on retrouve, bien entendu, l'équation du mouvement de l'Oscillateur Harmonique :

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Où «  $x$  » est la variable notant l'écart par rapport à la position d'équilibre de l'oscillateur harmonique, soit  $X = x - x_{eq}$  avec  $x_{eq} = x_0 + \frac{mg}{k}$  ; d'où :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}k \left( (x - x_0) - \frac{mg}{k} \right)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}k(x - x_0)^2}_{\mathcal{E}_{p,elast}} \underbrace{-mgx}_{\mathcal{E}_{p,g}} + \text{Cste}$$

→ L'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique est bien la somme de ses différentes formes d'énergies potentielles.

Ici, il s'agit de l'énergie potentielle élastique (prise nulle en  $x = x_0$ ) et de l'énergie potentielle de pesanteur (prise nulle en  $x = 0$ ), la Cste permettant de choisir l'origine de l'énergie potentielle totale en  $x = x_{eq}$ .

• → Cf. Cours.

• La solution de l'équation différentielle étant de la forme  $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et de période  $T_0$ , toutes les grandeurs  $g$  décrivant le mouvement sont également périodiques de période  $T_0$  et leurs valeurs moyennes sont définies par :

$$\langle g \rangle \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) dt \quad \text{avec} \quad t \equiv t_0 + T_0 \quad \text{et } t_0 \text{ quelconque}$$

→ La valeur moyenne des énergies cinétique et potentielle sont donc égale à :

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle \equiv \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \mathcal{E}_k dt \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_p \rangle \equiv \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \mathcal{E}_p dt$$

... Cf. Cours ... D'où :

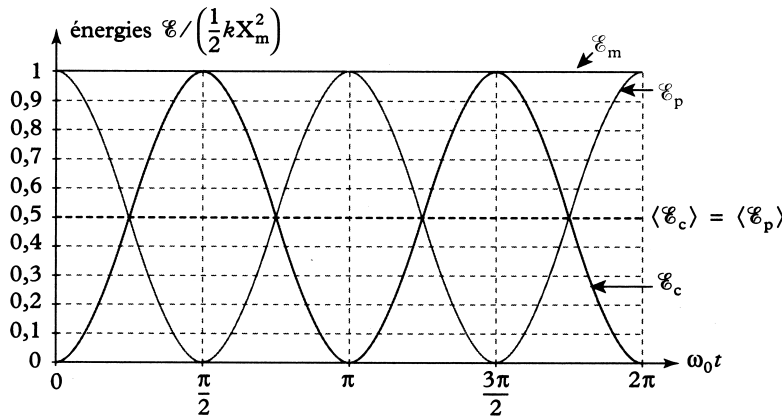
$$\langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{4} k X_m^2$$

$$\langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{4} k X_m^2$$

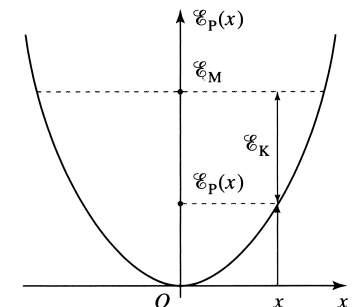
Or  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \text{Cste} = \frac{1}{2} k X_m^2 \rightarrow \langle \mathcal{E}_k \rangle = \langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$  avec  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} k X_m^2$

On décrit cette égalité en disant qu'il y a **équipartition de l'énergie**.

(Sous-entendu : l'énergie mécanique, *en moyenne*, se répartit autant en énergie cinétique qu'en énergie potentielle).



Énergies cinétique, potentielle et mécanique de l'oscillateur harmonique ( $\varphi = 0$ ).



Aspect spatial de l'échange mutuel des formes cinétique et potentielle de l'énergie mécanique.

## 1.5 Portrait de phase d'un oscillateur harmonique

◇ **Définition** : On appelle **portrait de phase** d'un système à un degré de liberté, dont l'évolution est décrite par la variable  $x(t)$ , un diagramme caractéristiques des évolutions du système représenté dans le **plan de phase**  $(x, \dot{x})$  (→ Cf Cours M1).

• On a vu au 1.4), pour le **ressort** modélisé par un oscillateur harmonique, que la conservation de l'énergie mécanique (Intégrale Première du Mouvement) donne une équation du type :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \mathcal{E}_m = \text{Cste} \quad \text{soit, encore :} \quad \frac{x^2}{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}} + \frac{\dot{x}^2}{\frac{2\mathcal{E}_m}{m}} = 1$$

→ On reconnaît l'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1$  d'une **ellipse** de demi-axes :

$$a = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{m\omega_0^2}} \quad \text{selon } x \quad \text{et} \quad b = \sqrt{\frac{2\omega_0^2 \mathcal{E}_m}{k}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{m}} \quad \text{selon } \dot{x}.$$

• L'ensemble des ellipses correspondant aux valeurs de  $\mathcal{E}_m$  possibles constitue le **portrait de phase** de l'oscillateur harmonique **NON amorti et libre** (non excité).

→ Cf. Cours

→ Cf. Poly : dans le cas du pendule simple, la modélisation de l'oscillateur harmonique est valable lorsque le portrait de phase est assimilable à une ellipse. Ce qui est le cas pour les faibles amplitudes :  $\theta_m = \alpha \leq 20^\circ$ . Il y a alors isochronisme des petites oscillations :  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

**Rq** : Dans le cas des amplitudes modérées ( $\theta \leq 90^\circ$ ), les portraits de phase ne sont plus des ellipses, il n'y a plus isochronisme des petites oscillations et on établit la formule de BORDA :

$$T \simeq T_0 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

## II Oscillateur harmonique spatial

**Définition :** On parle d'**oscillateur harmonique spatial** lorsque les équations décrivant l'évolution du système peuvent se mettre sous la forme de 3 équations de la forme :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_1x = 0 \\ m\ddot{y} + k_2y = 0 \\ m\ddot{z} + k_3z = 0 \end{cases} \quad x, y, z \text{ étant 3 variables indépendantes (par ex. les coordonnées cartésiennes)}$$

De solution générale : 
$$\begin{cases} x = X_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = Y_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ z = Z_m \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega_i^2 = \frac{k_i}{m} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

**Conclusion :** Le mouvement se caractérise par des *oscillations* correspondant à 3 *oscillateurs harmoniques indépendants*.

### Exemple : Oscillateur Harmonique Spatial Isotrope

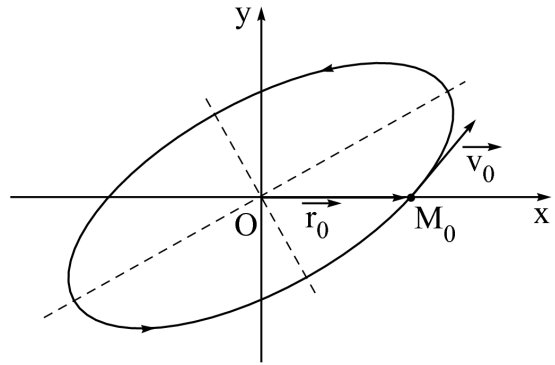
• Soit un point matériel  $M$  repéré par le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  par rapport à un point  $O$  fixe du référentiel d'étude (supposé galiléen).

À la date  $t = 0$ , il a la position  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM}_0$  et une vitesse  $\vec{v}_0$ .

Il est soumis à la force  $\vec{F} = -k \vec{r}$ .

• Le **P.F.D.** s'écrit :  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r}$ , soit encore :

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}} \quad \text{avec} : \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$



• La solution s'écrit :  $\vec{r} = \vec{A} \cos \omega_0 t + \vec{B} \sin \omega_0 t$ , où  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont des vecteurs à déterminer en fonction des **Conditions Initiales**.

→ En utilisant :  $\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$ , on déduit :  $\boxed{\vec{A} = \vec{r}_0}$ .

→ Avec  $\frac{d\vec{r}}{dt}(t = 0) = -\vec{A} \omega_0 \sin \omega_0 t + \vec{B} \omega_0 \cos \omega_0 t$ , on déduit :  $\frac{d\vec{r}}{dt}(t = 0) = \boxed{\vec{v}_0 = \vec{B} \omega_0}$ .

Finalement :  $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega_0 t + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}$ , ce qui montre que le mouvement se fait dans le *plan* passant par  $O$  et déterminé par les directions de  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$ .

• Définissons un repère en prenant l'axe  $Ox$  suivant  $\vec{r}_0$  et l'axe  $Oy$  dans le plan de la trajectoire. En projetant l'équation de  $\vec{r}$  sur les axes, on a :

$$\begin{cases} x = r_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ y = \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{cases} \quad \text{où } v_{0x} \text{ et } v_{0y} \text{ sont les composantes de } \vec{v}_0.$$

→ On obtient bien 2 *oscillateurs indépendants*<sup>1</sup>.

• L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps  $t$  à l'aide de la relation  $\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1$ .

On isole donc : 
$$\begin{cases} \sin \omega_0 t = \frac{\omega_0 y}{v_{0y}} \\ \cos \omega_0 t = \frac{x}{r_0} - \frac{y v_{0x}}{r_0 v_{0y}} \end{cases} \quad \text{on a alors : } \left( \frac{v_{0x}^2}{r_0^2 v_{0y}^2} + \frac{\omega_0^2}{v_{0y}^2} \right) y^2 + \frac{x^2}{r_0^2} - 2xy \frac{v_{0x}}{r_0 v_{0y}} = 1$$

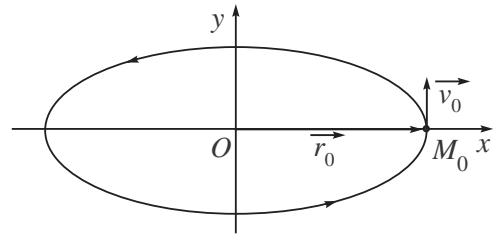
→ **CI :** La trajectoire est donc une **ellipse centrée en  $O$** .

1. Le fait qu'il n'en apparaît que 2 au lieu des trois attendus vient du choix judicieux du repère  $Oxy$  pour exprimer la trajectoire plane

Ce qui se voit bien dans le cas particulier  $v_{0x} = 0$  où l'équation devient :

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_{0y}^2}{\omega_0^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec  $a = r_0$  et  $b = \frac{|v_{0y}|}{\omega_0}$ .



### Qu'en est-il de l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique spatial ?

Un raisonnement similaire au précédent (cf. §4) mais tenant compte, cette fois, des trois équations scalaires du mouvement issues du P.F.D. conduit à :

$$\mathcal{E}_m = \left( \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 \right) + \left( \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} k_3 z^2 \right)$$

→ **Retenons** que l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique spatial est la *somme* des énergies mécaniques des *trois* oscillateurs harmoniques associés à ses *trois* degrés de liberté.

On reconnaît l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2$

et il apparaît l'énergie potentielle :  $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 + \frac{1}{2} k_3 z^2$ .

**CI** : Un oscillateur harmonique spatial correspond donc à un point matériel soumis à une *force conservative* :

$$\vec{F} \equiv - \left( \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{e}_x - \left( \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{e}_y - \left( \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{e}_z = -k_1 x \vec{e}_x - k_2 y \vec{e}_y - k_3 z \vec{e}_z$$

### Et pour l'oscillateur harmonique spatial isotrope ?

Ce qui précède est toujours valable bien sûr, puisque l'O.H.S.I. est un cas particulier d'O.H.S. où la force de rappel est colinéaire au vecteur position :

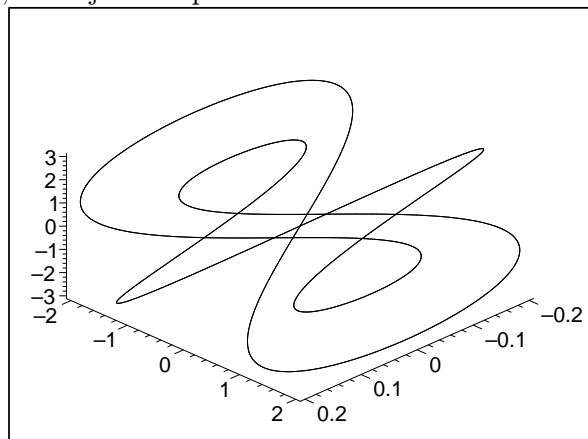
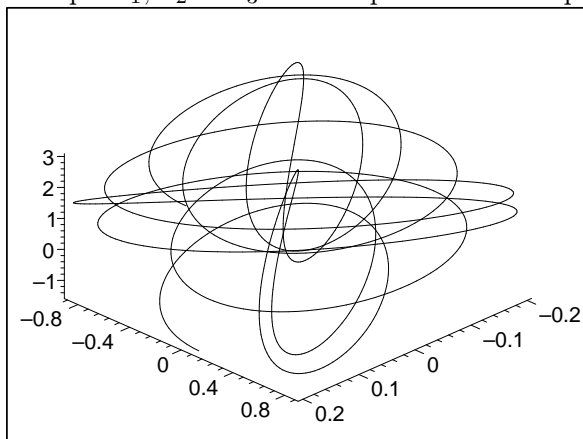
$$\vec{F} \equiv -k \vec{r} = -kx \vec{e}_x - ky \vec{e}_y - kz \vec{e}_z \quad \text{ce qui signifie : } k_1 = k_2 = k_3.$$

Ce qui revient à dire que l'énergie potentielle de l'oscillateur n'est fonction que de la distance  $r = OM$  du point matériel M au centre de force O :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k OM^2 = \frac{1}{2} kr^2$$

### Trajectoire d'un Oscillateur Harmonique Spatial Anisotrope :

Lorsque  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  ne sont pas tous identiques, la trajectoire peut être ouverte ou fermée :



## III Oscillations libres amorties de l'Oscillateur Harmonique

### III.1 Exemples

Dans les deux exemples du I.1), la façon la plus simple de tenir compte de l'amortissement est d'introduire une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On parle dans ce cas de **frottement fluide visqueux** car cela décrit bien l'effet dû au déplacement dans un liquide ou un gaz à des vitesses faibles. Cela permet par ailleurs, de conserver la linéarité des équations puisque la force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse<sup>2</sup>.

#### a Ressort vertical (Cf I.1) :

Dans l'exemple du ressort, on ajoute la force opposée à la vitesse  $-h\dot{x}\vec{e}_x$ , d'où l'équation ② - ① :  $m\ddot{x} = -h\dot{x} - k(x - x_{eq})$

soit, en introduisant l'**écart** par rapport à l'équilibre  $X \equiv x - x_{eq}$  :  $\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$ .

Ce que l'on peut encore écrire, en introduisant la **pulsation propre**  $\omega_0$  du système {ressort-masse} et la **durée caractéristique**  $\tau$  :

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \tau \equiv \frac{m}{h}.$$

#### b Pendule simple :

On ajoute la force  $-h\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ , d'où en projetant le **PF.D.** selon  $\vec{e}_\theta$  dans la base polaire :  $mL\ddot{\theta} = -hL\dot{\theta} - mg \sin \theta$ ,

soit, pour les petites oscillations ( $\sin \theta \simeq \theta$ ) :  $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ .

Ce que l'on peut encore écrire, en introduisant la **pulsation propre**  $\omega_0$  du pendule (système {fil-masse}) et la **durée caractéristique**  $\tau$  :

$$\ddot{\theta} + \frac{\dot{\theta}}{\tau} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l} \quad \text{et} \quad \tau \equiv \frac{m}{h}.$$

#### c Rappel d'électrocinétique :

Nous rencontrerons un tel type d'équation, en **Électricité** (→ Cf Cours E3) : , dans le circuit *RLC* série, l'amortissement est dû à la résistance, et la charge  $q$  du condensateur vérifie en régime libre :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad \text{qu'on peut encore écrire :} \quad \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\text{avec : } \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}. \quad \text{Soit : } \tau = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}, \quad \text{avec, toujours, } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

### III.2 Définitions

◇ **Définition** : On appelle **Oscillateur Harmonique Amorti** un système à *un* degré de liberté dont l'évolution est régie par l'équation différentielle linéaire du second

ordre :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0 \quad (E_{OHA})$$

avec  $\omega_0$  la **pulsation propre**

et  $\tau$  le **temps de relaxation** (encore appelée **durée caractéristique**).

2. et non pas à son carré, comme c'est le cas des forces de frottement fluide pour les grandes vitesses (→ Cf Cours M2)

On introduit souvent le paramètre sans dimension  $Q$  appelé **facteur de qualité** défini par :

$$Q \equiv \omega_0 \tau .$$

L'équation devient :  $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  – d'équation caractéristique :  $r^2 + \frac{r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$  (1)

**Propriété** : Plus  $Q$  est grand, plus le terme lié à l'amortissement est faible.

### III.3 Les régimes de l'oscillateur harmonique amorti (→ Cf. E4.IV)

Le discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique (1) :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

Trois régimes libres sont possibles :

Régime Apériodique $Q < \frac{1}{2}$ ( $\Delta > 0$ )	Régime Critique $Q = \frac{1}{2}$ ( $\Delta = 0$ )	Régime Pseudo-périodique $Q > \frac{1}{2}$ ( $\Delta < 0$ )
Il existe deux solutions réelles $r_1$ et $r_2$ de (1) avec $ r_1  <  r_2 $ .	L'unique solution de (1) est : $r = -\omega_0$ d'où :	Deux solutions imaginaires de (1) : $r_{1/2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$ on note $\alpha \equiv \frac{1}{2\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} < \omega_0$ et $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
la solution est de la forme : $x = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$	la solution est de la forme : $x = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$	la solution est de la forme : $x = e^{-\alpha t} A \cos(\omega t + \varphi)$ $A \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$
$r_1$ et $r_2$ sont toutes les deux négatives et leur produit vaut : $r_1 r_2 = \omega_0^2$ $\rightarrow  r_1  < \omega_0$ et $ r_2  > \omega_0$ . $\rightarrow x$ s'amortit donc principalement en $e^{r_1 t} = e^{- r_1  t}$ .	$x$ s'amortit comme $e^{-\omega_0 t}$ : cas où l'amortissement est le plus rapide (durée $\sim \frac{2\pi}{\omega_0}$ )	<b>Pseudo-période</b> : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ $T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right) > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$ pseudo-période > période propre $\rightarrow$ amortissement au bout de qqes $T$ .
		<b>Définition</b> : Décrément logarithmique : $\delta \equiv \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}}$ $\rightarrow \delta = \alpha T$

### III.4 Énergie de l'oscillateur harmonique amorti

Reprenons l'équation de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\dot{x}}{\tau}$$

Multiplions cette équation par  $m\dot{x}$  ; il vient :

$$m\ddot{x}\dot{x} + m\omega_0^2\dot{x}x = -\frac{m\dot{x}^2}{\tau} < 0$$

Ce qu'on peut encore écrire :

L'énergie mécanique diminue donc à cause des phénomènes d'amortissement.

- En *régime pseudo périodique*, les pertes relatives pendant une pseudo-période sont :  
... calculs : cf. Cours manuscrit ...

$$-\frac{\Delta\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T)}{\mathcal{E}_m(t)} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

- → cf. PORTRAITS DE PHASE :

Il y a retour à la position d'équilibre stable ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) quel que soit le régime libre. On dit que ce point particulier ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) du plan de phase est un «attracteur».