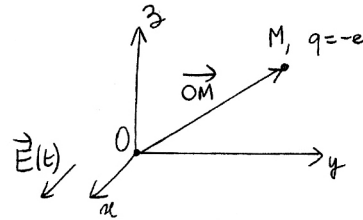


EXMS-5 Couleur du Ciel

1) {électron} étudié dans le référentiel supposé équilibré lié au centre de l'atome.

- force électrique $\vec{F}_e = -e\vec{E}(t)$
- force de liaison élastique $\vec{F}_e = -k\vec{OM}$
- force de frottement fluide $\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\frac{d\vec{OM}}{dt}$
- poids $\vec{P} = m\vec{g}$ négligeable devant les forces électromagnétique \vec{F}_e, \vec{F}_{el}



PFD : $m\vec{a}_{M/R} = \vec{F}_e + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f$ soit $m\ddot{\vec{OM}} = -e\vec{E}(t) - k\vec{OM} - h\dot{\vec{OM}}$

d'où $\ddot{\vec{OM}} + \frac{h}{m}\dot{\vec{OM}} + \frac{k}{m}\vec{OM} = -\frac{e}{m}\vec{E}(t)$

$\ddot{\vec{OM}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{OM}} + \omega_0^2\vec{OM} = -\frac{e}{m}\vec{E}(t)$ (*)
 avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10,5 \cdot 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
 $Q = \frac{m\omega_0}{h} \gg \gg 1$

↳ la fréquence propre associée à ω_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

la longueur d'onde associée à ω_0 :

$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0} \cong 180 \text{ nm} \Rightarrow \text{UV.}$

2) $\vec{E}(t) = E_0 \cos \omega t \vec{e}_x = \vec{E}_0 \cos \omega t$. le régime forcé correspond à une solution particulière de (*) avec second membre \rightarrow on cherche donc une solution vectorielle selon \vec{e}_x

\rightarrow projecté de (*) selon \vec{e}_x :

$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}E_0 \cos \omega t$ avec $\begin{cases} \vec{OM} = x(t)\vec{e}_x \\ x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

\rightarrow passage en complexes : $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X} e^{j\omega t}$ et $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$

↳ $\underline{X}(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = -\frac{e}{m}E_0 \rightarrow \underline{X} = \frac{-eE_0}{m\omega_0^2(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0})}$

$\underline{X} = X_m e^{j\varphi} = \frac{+j e E_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + j(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1)}$ soit

$X_m = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$
 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

3) $\lambda_b = \frac{2\pi c}{\omega_b} \rightarrow \omega_b = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$\lambda_r = \frac{2\pi c}{\omega_r} \rightarrow \omega_r = 2,3 \cdot 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$\forall \lambda \in [\lambda_b, \lambda_r] : \omega < \omega_0 \rightarrow X_m \cong \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$ et $\varphi \cong \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

4) $\vec{OM} = X_m \cos(\omega t + \pi) \vec{e}_x = -X_m \cos \omega t \vec{e}_x = -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos \omega t \vec{e}_x = -\frac{e}{m\omega_0^2} \vec{E}(t)$

$\dot{\vec{OM}} = X_m \omega \sin \omega t \vec{e}_x$ et $\ddot{\vec{OM}} = \omega^2 X_m \cos \omega t \vec{e}_x = \frac{e\omega^2}{m\omega_0^2} E_0 \cos \omega t \vec{e}_x$

\rightarrow la puissance rayonnée par l'électron dans une longueur d'onde donnée est : $\langle P \rangle = K$ amplitude de l'accélération.

d'où $\langle P_b \rangle = K \left(\frac{e\omega_b^2}{m\omega_0^2} E_0\right)^2$ et $\langle P_r \rangle = K \left(\frac{e\omega_r^2}{m\omega_0^2} E_0\right)^2$

d'où $\frac{\langle P_b \rangle}{\langle P_r \rangle} = \left(\frac{\omega_b}{\omega_r}\right)^4 = \left(\frac{2\pi c}{\lambda_b} \frac{\lambda_r}{2\pi c}\right)^4 \rightarrow \frac{\langle P_b \rangle}{\langle P_r \rangle} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 = 2^4 = 16$

↳ ainsi, la puissance rayonnée par l'électron est maximale pour une radiation bleue \Rightarrow le ciel est donc bleu.