

EXM5.2 Déphasage de la Vitesse p/r à la force excitatrice

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t) = F_m \cos(\omega t + \psi) \rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \psi).$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h}$

puisque en régime forcé $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

on peut introduire la notation complexe $\underline{x} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ et $\underline{f} = F_m e^{j\psi} e^{j\omega t}$ avec $F = F_m e^{j\psi}$

d'où $\underline{x} (\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}) = \frac{F}{m}$

On cherche la vitesse $v \equiv \dot{x} = V_m \cos(\omega t + \varphi)$; en complexe : $\underline{v} = j\omega \underline{x}$

d'où $\underline{v} = \frac{j\omega \frac{F}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_m}{m}}{j(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega) + \frac{\omega_0}{Q}} e^{j\psi} = V_m e^{j\varphi}$

d'où $\frac{\frac{F_m}{m}}{j(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega) + \frac{\omega_0}{Q}} = e^{j\varphi_r}$ où $\varphi_r \equiv \varphi - \psi$ est le déphasage de v p/r à $f(t)$

soit $e^{-j\varphi_r} = \cos\varphi_r - j\sin\varphi_r = \frac{j(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)V_m}{\frac{F_m}{m}} + \frac{\frac{\omega_0}{Q} V_m}{\frac{F_m}{m}}$

On peut toujours poser $\alpha \equiv \frac{\omega_0}{Q}$ (α est le coefficient d'amortissement)

alors $\sin\varphi_r = \frac{(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)V_m}{\frac{F_m}{m}}$ et $\cos\varphi_r = \frac{\alpha V_m}{\frac{F_m}{m}}$

2) le travail élémentaire fourni par la force excitatrice est :

$$\delta\mathcal{C} \equiv f(t) dx = \dot{f}(t) x(t) dt = F_m \cos(\omega t + \psi) V_m \cos(\omega t + \varphi) dt$$

$$= \frac{F_m V_m}{2} [\cos(\psi - \varphi) + \cos(2\omega t + \psi + \varphi)] dt.$$

d'où, sur une période : $\mathcal{C} = \int_0^T \delta\mathcal{C} = \int_0^T \frac{F_m V_m}{2} [\cos(\psi - \varphi) + \cos(2\omega t + \psi + \varphi)] dt$

$$\mathcal{C} = \frac{F_m V_m}{2} \left[\cos\varphi_r T - \frac{1}{2\omega} \left| \sin(2\omega t + \psi + \varphi) \right|_0^T \right] = \frac{F_m V_m}{2} T \cos\varphi_r$$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \frac{F_m V_m}{2} T \frac{\alpha V_m}{\frac{F_m}{m}} = \frac{V_m^2}{2} T m \frac{\omega_0}{Q} = \frac{V_m^2}{2} T m \frac{h}{m\omega_0}$

d'où $\mathcal{C} = \frac{h V_m^2}{2} T$

Or le travail des forces de frottement sur une période est :

$$\mathcal{C}_f = \int_0^T \delta\mathcal{C}_f = \int_0^T -h \dot{x} dx = \int_0^T -h \dot{x}^2 dt = -h V_m^2 T \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$

d'où $\mathcal{C}_f = -\frac{h V_m^2}{2} T$

d'où $\mathcal{C} + \mathcal{C}_f = 0$: Sur une période le travail fourni par la force excitatrice compense le travail des fcs de frottements.