EXM5.1 Sismographe :

1) {masse m} à l'équilibre ds R_0 galiléen ($x_1 = 0$)
la masse est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F}_{re}$
→ à l'équilibre $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{re}$ $\Rightarrow$ ① $0 = mg - k(l_e - l_0) = mg - k(x_e - a - l_0)$

↳ avec $l_e = x_e - a - \cancel{x_{1,eq}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{x_e = l_0 + \frac{mg}{k} + a}$

2) Hors équilibre : ② $m\ddot{x} = mg - k(l - l_0) - h(\dot{x}_A - \dot{x}_B)$

avec $l(t) = x(t) - a - x_1(t)$
$\dot{x}_A = \dot{x}_C = \frac{d(x_G + a)}{dt} = \dot{x}_G = \dot{x}(t)$
$\dot{x}_B = \dot{x}_D = \dot{x}_1(t)$

② $m\ddot{x} = mg - k(x - a - x_1 - l_0) - h(\dot{x} - \dot{x}_1)$

② − ① $\Rightarrow$ $\boxed{m\ddot{x} = -k(x(t) - x_1 - x_e) - h(\dot{x} - \dot{x}_1)}$ ③

Si on pose $\boxed{X \equiv x - x_1 - x_e}$ alors $\dot{X} = \dot{x} - \dot{x}_1$ et $\ddot{X} = \ddot{x} - \ddot{x}_1$, soit $m\ddot{x} = m\ddot{X} + m\ddot{x}_1$

Alors ③ $\Rightarrow$ $m\ddot{X} + m\ddot{x}_1 = -kX - h\dot{X}$ Or $x_1 = b\sin\omega t$ soit $\ddot{x}_1 = -b\omega^2\sin\omega t$

d'où $m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = + mb\omega^2\sin\omega t$ soit $\boxed{\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\sin\omega t = e(t)}$

avec $A = b\omega^2$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h}$

Solut° du régime forcé :
$X(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$

Pour résoudre cette équation différentielle, on introduit la notation complexe : $\begin{cases} \underline{X} = X_m \exp j(\omega t + \varphi) \\ \underline{e} = A \exp j(\omega t) \end{cases}$

mais ATTENTION !
Ici on est en convention $\sin(\omega t + \varphi)$ et non pas $\cos(\omega t + \varphi)$ → pour revenir en réel, il faut prendre la partie imaginaire et non pas la partie réelle.

Mais en fait, il suffit de trouver X_m et φ, soit le module et l'argument de l'amplitude complexe $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$ de la représentat° complexe $\underline{X} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$.

l'EQ différentielle donne $\underline{X}\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = A e^{j\omega t}$ → $\underline{X_m} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

$\underline{X_m} = \frac{-jA}{\frac{\omega\omega_0}{Q} + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$

$\boxed{X_m = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\frac{\omega\omega_0}{Q}}}$

↳ $x(t) = X(t) + x_1(t) + x_e$.

$\begin{cases} \omega \to 0 & \varphi \to -\frac{\pi}{2} - \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \\ \omega = \omega_0 & \varphi = -\frac{\pi}{2} \\ \omega \to \infty & \varphi \to -\frac{\pi}{2} - \arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \end{cases}$

ON RETROUVE LE RÉSULTAT DU COURS.

EXM5.3 Route Ondulée :

(6)

1) {m} : PFD projeté selon la verticale ascendante : $m\ddot{z} = -k(l - l_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_0) - mg$ ①
à l'équilibre (route plate $z_0 = 0$) selon z : $0 = -k(l_e - l_0) - h(\cancel{\dot{z}_e} - \cancel{\dot{z}_{0,e}}) - mg$ ②

avec $\forall t$ $l(t) = l_e - z_0(t) + z(t)$ d'où ① → $m\ddot{z} = -k(l_e - l_0 + z - z_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_0) - mg$ ③

En faisant ① − ②, on trouve :
$\boxed{m\ddot{z} = -k(z(t) - z_0(t)) - h(\dot{z} - \dot{z}_0)}$ (*)

Comme $z_0(t) = a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ avec $x = vt$ (mvt rectiligne uniforme selon $\vec{e}_x$ à la vitesse $\vec{v}$)
on peut écrire $z_0(t) = a\cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right)$ soit $z_0(t) = a\cos(\omega t)$ avec $\omega \equiv \frac{2\pi v}{\lambda}$.

Alors (*) → $\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = a\left(\frac{k}{m}\cos\omega t - \frac{h\omega}{m}\sin\omega t\right)}$ Équat° du mouvement

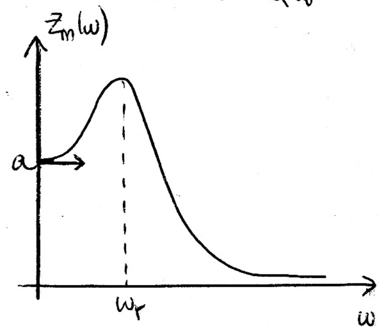
2) (*) $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_0 + \frac{h}{m}\dot{z}_0$ $\Leftrightarrow$ $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_0(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_0(t)$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q \equiv \frac{m\omega_0}{h}$ → en notat° complexe : $\underline{z} = Z_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $z = Z_m\cos(\omega t + \varphi)$
$\underline{z} = \underline{Z} e^{j\omega t}$ et $\underline{z_0} = a e^{j\omega t}$.

et (*) devient : $\underline{Z} = \frac{\omega_0^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} a$

soit encore : $\underline{Z} = \frac{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} a$ d'où $Z_m = |\underline{Z}| = \frac{a\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$

• Si $\omega \to 0$, $Z_m \to a$
$\omega \to \infty$ $Z_m \to 0$



Il faut donc rouler à grande vitesse ($\omega \gg \omega_r$) pour que les amplitudes des vibrations soient faibles.

Rque : • mais comme la vitesse est limitée, on comprendra qu'il vaut mieux privilégier la sécurité au confort : on roulera donc sur une route ondulée le plus lentement possible ($Z_m \to a$).
• De telles parties ondulées qui délimitent les bandes de roulement d'une autoroute sont ainsi faites pour (éventuellement) réveiller un conducteur qui se serait endormi !