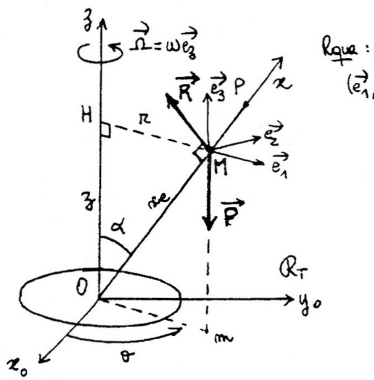
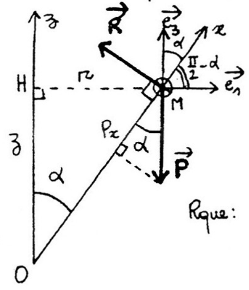
EX MG.7 : Tige soudée à un plateau tournant



Rque : en fait $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = (\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

Schéma ds le plan (Oz, Ox)



Rque :

1) PFD dans R_T supposé galiléen appliqué au système $\{M; m\}$: $m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}$

$m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}$ est une relation vectorielle que l'on peut exprimer dans la base de notre choix : pourquoi pas dans $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ qui est la base la plus adaptée au pb de rotat° autour d'un axe fixe Oz puisqu'elle est, en réalité, la base cylindrique ?

dans $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$:

$$m \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$$

↳ 3 équations scalaires, qui deviennent, en remarquant que $\begin{vmatrix} r = cte \\ z = cte \end{vmatrix}$ pour M à l'équilibre, pas dans R_T, mais dans R_{Tige} !!
puisqu'alors, dans R_T : M a un mvmt circulaire uniforme autour de H !

$$\begin{vmatrix} r = cte \\ z = cte \\ \omega = \dot{\theta} = cte \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{r} = 0, \ \ddot{r} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \\ \dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -mr\omega^2 = R_1 & (1) \\ 0 = R_2 & (2) \\ 0 = -mg + R_3 & (3) \end{cases}$$

a) Comme $r = x_e \sin\alpha$, (1) devient : $\boxed{-m \sin\alpha \, x_e \omega^2 = R_1 \quad (1)}$

Ceci ne nous aide pas à déterminer x_e puisque R_1 est inconnue pour l'instant !

→ Il faut faire intervenir une relation liant x_e et les seules données connues de l'énoncé (m, g, α, ω) : pour cela projetons le PFD sur $\vec{e_x}$ puisque la direction (Ox) est TOUJOURS perpendiculaire à $\vec{R}$ par définition !

PFD : $m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}$ ⟶ Project° selon $\vec{e_x}$: $m\vec{a}_{M/R_T} \cdot \vec{e_x} = (\vec{P} + \vec{R}) \cdot \vec{e_x}$

soit $m(-r\omega^2 \vec{e_1}) \cdot \vec{e_x} = \vec{P} \cdot \vec{e_x} + \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{e_x}}_{0}$

Or $\vec{e_1} \cdot \vec{e_x} = 1.1.\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ et $\vec{P} \cdot \vec{e_x} = P_x = -mg\cos\alpha$

d'où : $-\cancel{m} r\omega^2 \sin\alpha = -\cancel{m} g\cos\alpha$ soit $x_e \omega^2 \sin^2\alpha = g\cos\alpha$ → $\boxed{x_e = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}}$

b) (1) → $\boxed{R_1 = -\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ (2) → $\boxed{R_2 = 0}$ (3) → $\boxed{R_3 = mg}$

Rque : Il apparaît que $\vec{R}$, réaction normale à la tige, est dans le plan $(M, \vec{e_1}, \vec{e_3})$

2) Théorème du moment cinétique en H pour le pt mat. M : $\left(\dfrac{d\vec{L}_{H/R_T}(M)}{dt}\right)_{R_T} = \vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P} + \vec{R})$

uniquement parce que H est FIXE et R_T GALILÉEN

• $\begin{cases} \vec{L}_{H/R_T}(M) \equiv \vec{HM} \times m\vec{v}_{M/R_T} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mvt circ. unif.}}}{=} r\vec{e_1} \times (mr\omega\vec{e_2}) = mr^2\omega\vec{e_3} = \vec{cte} \\ \vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P} + \vec{R}) \equiv \vec{HM} \times (\vec{P} + \vec{R}) \end{cases}$

• $\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P} + \vec{R}) = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -mg + R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -r(R_3 - mg) \\ rR_2 \end{vmatrix}$ $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

. Thm M^t Cin en H s'écrit donc, puisque $\begin{vmatrix} r = x_e \sin\alpha \\ \omega = cte \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -x_e \sin\alpha (R_3 - mg) \\ x_e \sin\alpha \, R_2 \end{vmatrix}$

→ On retrouve : $\boxed{R_2 = 0}$ $\boxed{R_3 = mg}$

Thm du Mom^t Cinétique en O pour le pt mat M : $\left(\dfrac{d\vec{L}_{O/R_T}(M)}{dt}\right)_{R_T} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P} + \vec{R})$

• $\vec{L}_{O/R_T}(M) \equiv \vec{OM} \times m\vec{v}_{M/R_T} = \begin{vmatrix} x_e \sin\alpha \\ 0 \\ x_e \cos\alpha \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ m x_e \sin\alpha \, \omega \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m\omega x_e^2 \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ m\omega x_e^2 \sin^2\alpha \end{vmatrix}$

$\left(\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R_T} = -m\omega x_e^2 \sin\alpha\cos\alpha \left(\dfrac{d\vec{e_1}}{dt}\right)_{R_T} + m\omega x_e^2 \sin^2\alpha \cancel{\left(\dfrac{d\vec{e_3}}{dt}\right)_{R_T}} = -m\omega^2 x_e^2 \sin\alpha\cos\alpha \, \vec{e_2}$

• $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P} + \vec{R}) = \begin{vmatrix} x_e \sin\alpha \\ 0 \\ x_e \cos\alpha \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ x_e \cos\alpha \, R_1 \\ 0 \end{vmatrix} = x_e \cos\alpha \, R_1 \, \vec{e_2}$

car $R_2 = 0$, $R_3 = mg$

• Thm M^t Cin. en O pour M évalué ds R_T : $-m\omega^2 x_e^{\cancel{2}} \sin\alpha \cancel{\cos\alpha} = \cancel{x_e} \cancel{\cos\alpha} R_1$

↳ $R_1 = -m\omega^2 x_e \sin\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 1)a)}}{=} -\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha}$ → $\boxed{R_1 = \dfrac{-mg}{\tan\alpha}}$ On retrouve les résultats de la question 1)b)