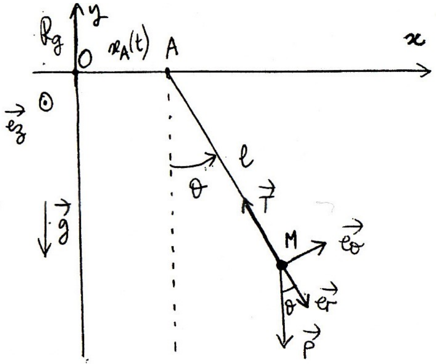
EXM6.6 Pendule & Point Mobile



1) $\{M, m\}$ est soumis à son poids et à la tension du fil $\vec T$ dont le support passe toujours par A donc $\vec{\mathcal M}_A(\vec T) = \vec{AM}\times\vec T = \vec 0\ \forall t$ ⊛

... mais ĉ A est mobile ds R_g, on n'a pas $\left(\frac{d\vec L_{A/R_g}}{dt}\right)_{dt} = \vec{\mathcal M}_A(\vec P+\vec T)$ car A est mobile!

... il faut reprendre le calcul :

$$\left(\frac{d\vec L_{A/R_g}(M)}{dt}\right)_{R_g} = \left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{R_g}\times m\vec v_{M/R_g} + \vec{AM}\times m\left(\frac{d\vec v_{M/R_g}}{dt}\right)_{R_g} = (\vec v_{M/R_g}-\vec v_{A/R_g})\times m\vec v_{M/R_g} + \vec{AM}\times m\vec a_{M/R_g}$$

Comme $\vec v_M\times\vec v_M = \vec 0$ et que $m\vec a_{M/R_g} = \vec P+\vec T$ on en déduit $\left.\frac{d\vec L_A}{dt}\right|_{R_g} = -\vec v_{A/R_g}\times m\vec v_{M/R_g} + \vec{\mathcal M}_A(\vec P+\vec T)$

Or $\vec{\mathcal M}_A(\vec T)=\vec 0$

d'où

$$\boxed{\left(\frac{d\vec L_{A/R_g}(M)}{dt}\right)_{R_g} = \vec{\mathcal M}_A(\vec P) + m\vec v_{M/R_g}\times\vec v_{A/R_g}} \quad (1)$$

⊛ Ce qui n'est pas le cas en O → d'où l'intérêt d'appliquer le TMC en A et pas en O.

2) $$\vec v_{M/R_g} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_g} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_g}}_{\vec v_{A/R_g}} + \left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{R_g} \quad \text{avec} \begin{cases}\vec{OA} = x_A\,\vec e_x\\ \vec{AM} = \ell\sin\theta\,\vec e_x - \ell\cos\theta\,\vec e_y.\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \boxed{\vec v_{A/R_g} = \dot x_A\,\vec e_x} \quad (2)\\ \left.\frac{d\vec{AM}}{dt}\right|_{R_g} = \ell\dot\theta\cos\theta\,\vec e_x + \ell\dot\theta\sin\theta\,\vec e_y\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\vec v_{M/R_g} = (\dot x_A + \ell\dot\theta\cos\theta)\vec e_x + \ell\dot\theta\sin\theta\,\vec e_y} \quad (3)$$

$$\hookrightarrow \boxed{m\vec v_{M/R_g}\times\vec v_{A/R_g} = m\begin{vmatrix}\dot x + \ell\dot\theta\cos\theta\\ \ell\dot\theta\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}_{(\vec e_x,\vec e_y,\vec e_z)} \times \begin{vmatrix}\dot x_A\\ 0\\ 0\end{vmatrix} = -m\,\dot x_A\,\ell\dot\theta\sin\theta\,\vec e_z} \quad (4)$$

(d'ordre 2 !)

De plus
$$\boxed{\vec{\mathcal M}_A(\vec P) = \vec{AM}\times\vec P = \begin{vmatrix}\ell\sin\theta\\ -\ell\cos\theta\\ 0\end{vmatrix}_{(\vec e_x,\vec e_y,\vec e_z)} \times \begin{vmatrix}0\\ -mg\\ 0\end{vmatrix} = -mg\ell\sin\theta\,\vec e_z} \quad (5)$$

Enfin
$$\boxed{\vec L_{A/R_g}(M) = \vec{AM}\times m\vec v_{M/R_g} = \begin{vmatrix}\ell\sin\theta\\ -\ell\cos\theta\\ 0\end{vmatrix}_{(\vec e_x,\vec e_y,\vec e_z)} \times m\begin{vmatrix}\dot x_A + \ell\dot\theta\cos\theta\\ \ell\dot\theta\sin\theta\\ 0\end{vmatrix} = m\ell(\ell\dot\theta + \dot x_A\cos\theta)\,\vec e_z} \quad (6)$$

Pour les petites oscillations : $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta\simeq\theta$

Or, le TMC en A s'écrit : $\left.\frac{d\vec L_A}{dt}\right|_{R_g} = \vec{\mathcal M}_A(\vec P) + m\vec v_{M/R_g}\times\vec v_{A/R_g}$

donc, selon $\vec e_z$:
$$m\ell(\ell\ddot\theta + \ddot x_A\underbrace{\cos\theta}_{1}) = -mg\ell\underbrace{\sin\theta}_{\theta} \underbrace{-\ m\,\dot x_A\,\ell\dot\theta\sin\theta}_{\text{négligeable car d'ordre 2 en } |\dot\theta\sin\theta| \simeq |\dot\theta\theta| \ll \theta \text{ puisque } \theta \text{ petit}}$$

$$\hookrightarrow \ell\ddot\theta + \ddot x_A = -g\theta \quad \text{avec } \ddot x_A = -\omega^2 x_A$$

soit $\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\theta = -\frac{\ddot x_A}{\ell} = +\omega^2\frac{x_A}{\ell}$ soit $\boxed{\ddot\theta + \omega_0^2\theta = \omega^2\frac{x_0}{\ell}\sin\omega t}$ (7)

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

3) En régime sinusoïdal (donc forcé), on a

$\theta = A\sin(\omega t+\varphi)$ pour $x_A = x_0\sin\omega t$ $\longrightarrow \begin{cases}\underline\theta = A\,e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline A\,e^{j\omega t}\\ \underline x_A = x_0\,e^{j\omega t}\end{cases}$

d'où (7) → $\underline A = \frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{x_0}{\ell}$

d'où (8) $\theta = \frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{x_0}{\ell}\sin\omega t$ si $\omega_0 > \omega$

(9) $\theta = \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{x_0}{\ell}\sin(\omega t+\pi)$ si $\omega_0 < \omega$

donc $\forall\omega$: $\boxed{\theta(t) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{x_0}{\ell}\sin\omega t}$

4) Résonance pour $\omega \simeq \omega_0$ ⟶ alors les "petites" oscillat° n'existent plus
↳ l'approximat° du traitem^t linéaire en 2) n'est plus valable

Si $\omega_0 > \omega$ (8) : le mouvem^t du pendule est en phase avec l'excitation
Si $\omega_0 < \omega$ (9) " " est en opposit° de phase avec ——