

EXM6.5 Trois Méthodes

1) a) $\vec{L}_{O/R}(M) = \vec{OM} \times m \vec{v}_{M/R} = R \vec{e}_r \times m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ soit $\left(\frac{dL_{O/R}}{dt}\right)_R = m R^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$

la réaction du support \vec{R} passe par O donc $\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \times \vec{R} = \vec{0}$

le moment du poids en O est :

$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & mg \cos \theta & -mg \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -mgR \sin \theta \vec{e}_z$

le moment de la tension du ressort en O est $\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \times \vec{T} = \vec{OM} \times (-k \vec{AM})$

avec $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$

d'où $\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \times (+kR \vec{e}_y - k\vec{OM}) = R \vec{e}_r \times kR \vec{e}_y = \begin{vmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & kR \sin \theta & kR \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d'où $\vec{M}_O(\vec{T}) = kR^2 \cos \theta \vec{e}_z$

TMC en O : $\left(\frac{dL_{O/R}}{dt}\right)_R = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{T})$

$m R^2 \ddot{\theta} = -mgR \sin \theta + kR^2 \cos \theta$

soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta - \frac{k}{m} \cos \theta = 0$ qui est l'équation du mouvement de M

$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin \theta - \omega_0^2 \cos \theta = 0$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b) Appliquons le PFD à $\{M, m\}$ dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$m \vec{a}_{M/R} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{T}$

Comme il n'y a pas de frottement, \vec{R} est dirigée perpendiculairement à \vec{e}_θ .

On a donc, en projection selon \vec{e}_θ :

$m a_\theta = 0 + mg \cdot \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta - k \vec{AM} \cdot \vec{e}_\theta$

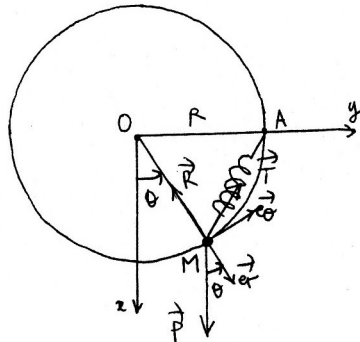
$-k \vec{AM} \cdot \vec{e}_\theta = -k \vec{AO} \cdot \vec{e}_\theta - k \vec{OM} \cdot \vec{e}_\theta = +kR \cos \theta$

$mg \cdot \vec{e}_\theta = -mg \sin \theta$

$a_\theta = R \ddot{\theta} + 2\dot{\theta} \dot{\theta}$

$m R \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + kR \cos \theta$

d'où $\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin \theta - \omega_0^2 \cos \theta = 0$



1c) Thm de l'énergie mécanique :

$dG_m = \delta W_{NC} = \delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{OM} = 0$ car $\vec{R} \perp d\vec{OM} \forall t$, (\vec{R} ne travaille pas d'où jusqu'à il n'y a pas de frottement)

$G_m = cte$ avec $G_m = E_k + E_{pg} + E_{pe}$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$

$E_{pg} = -mgR \cos \theta + cte = -mgR \cos \theta + (cte)$ (la verticale est descendante)

$E_{pe} = \frac{1}{2} k AM^2$

avec $AM^2 = (\vec{AO} + \vec{OM})^2 = R^2 + R^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} = 2R^2 + 2R^2 \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = 2R^2(1 - \sin \theta)$

d'où $E_{pe} = kR^2(1 - \sin \theta)$

d'où $\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta + kR^2(1 - \sin \theta) = cte$

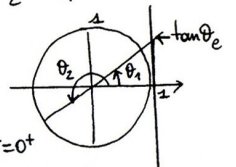
$\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta - kR^2 \cos \theta = 0$

$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin \theta - \omega_0^2 \cos \theta = 0$ (*)

2) lorsque il y a équilibre, on a $\theta = cte$ soit $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$ d'où (*) $\omega_1^2 \sin \theta_e - \omega_0^2 \cos \theta_e = 0$

soit $\tan \theta_e = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \rightarrow 2$ solutions : $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 = \theta_1 + \pi$

$\theta_1 = \arctan \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}$ et $\theta_2 = \theta_1 + \pi$



Pour un voisinage de θ_e , on a $\theta = \theta_e + \epsilon$, avec $\ddot{\theta} = \ddot{\epsilon}$ et $\epsilon \ll \theta$ pour $\theta = 0^+$

d'où (*) devient : $\begin{cases} \sin \theta = \sin(\theta_e + \epsilon) = \sin \theta_e \cos \epsilon + \cos \theta_e \sin \epsilon \approx \sin \theta_e + \epsilon \cos \theta_e \\ \cos \theta = \cos(\theta_e + \epsilon) = \cos \theta_e \cos \epsilon - \sin \theta_e \sin \epsilon \approx \cos \theta_e - \epsilon \sin \theta_e \end{cases}$

$\ddot{\epsilon} + \omega_1^2 (\sin \theta_e + \epsilon \cos \theta_e) - \omega_0^2 (\cos \theta_e - \epsilon \sin \theta_e) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\epsilon} + (\omega_1^2 \cos \theta_e + \omega_0^2 \sin \theta_e) \epsilon = 0$

d'où : $\ddot{\epsilon} + K \epsilon = 0$ avec $K = \omega_1^2 \cos \theta_e + \omega_0^2 \sin \theta_e$

• Pour $\theta_e = \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $K = \Omega^2 > 0$ et on a : $\ddot{\epsilon} + \Omega^2 \epsilon = 0$ soit $\epsilon = A \cos(\Omega t + \phi)$

\rightarrow Oscillations harmoniques de période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ autour de la position d'équilibre stable θ_1 .

• Pour $\theta_e = \theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$: $K = -\Omega^2 < 0$

et on a $\ddot{\epsilon} - \Omega^2 \epsilon = 0$ soit $\epsilon = A \exp(\Omega t) + B \exp(-\Omega t)$

\rightarrow Équilibre instable car $|\theta| \nearrow$ (on quitte immédiatement θ_e).