■ travail, énergie potentielle, énergie cinétique et énergie mécanique

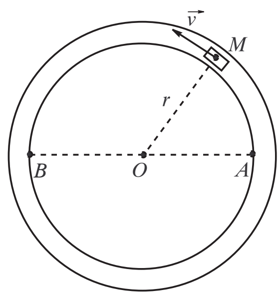
➜ Bien regarder les fiches Méthodes M2/M3

Ex-M3.1 **Chute verticale avec frottement :**
Une masse ponctuelle $m = 200\ g$ est lancée vers le haut depuis le point A avec une vitesse initiale $v_A = 10\ m.s^{-1}$.
En supposant la force de frottement verticale, d'intensité constante $f = 0,50\ N$, calculer (sans calculatrice) :
1) La hauteur $h = AB$ dont elle est montée
2) sa vitesse v'_A quand elle repasse par le point de lancement.
Données : On oriente la verticale Oz vers le haut. $g = 10\ m.s^{-2}$ et $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,77$.
Rép : Corrigé complet sur le Blog
1) $h = z_B - z_A = \dfrac{v_A^2}{2\left(g + \frac{f}{m}\right)} = 4,0\ m$; **2)** $v'_A = v_A\sqrt{\dfrac{mg - f}{mg + f}} \approx 7,7\ m.s^{-1}$. ➜ Cf Blog

Ex-M3.2 **Vitesse d'un pendule**
On accroche une bille de masse $m = 200\ g$ au bout d'un fil de masse négligeable et de longueur $l = 1\ m$.
On lâche la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle $\theta_0 = 15°$ avec la verticale.
1) Quelle est la vitesse v_m lors de son passage par la position verticale ?
2) Établir par deux méthodes puis calculer la période de ce pendule en suposant que le mouvement vérifie l'hypothèse des petites oscillations.
Rép : **1)** $v_m = 0,82\ m.s^{-1}$; **2)** $T_0 = 2,0\ s$.

Ex-M3.3 **Vitesse minimale**
Un point matériel M soumis à la pesanteur et à une force de frottement fluide opposée à la vitesse est lancé avec une vitesse initiale inclinée d'un angle α avec le plan horizontal.
En appliquant seulement le théorème de la puissance cinétique (et sans aucun calcul de trajectoire), montrez que la vitesse (en norme) est minimale **après** le sommet de la trajectoire.

Ex-M3.4 **Frottement fluide**
Un véhicule assimilé à un point matériel M, est en mouvement circulaire (rayon r) uniforme (vitesse de norme v). La force de frottement fluide agissant sur le véhicule est du type : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.



→ Déterminer le travail W de cette force lorsque le véhicule part de A et arrive en B après n tours complets. Commenter le résultat obtenu.
Rép : $W = -\alpha v 2\pi r\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$

Ex-M3.5 **Glissement d'un solide sur un plan incliné**
Résoudre l'exercice **Ex-M2.9** par un raisonnement énergétique. Par ailleurs, on ajoute la question suivante lorsqu'on tient compte du coefficient de frottement solide f :
➜ Quelle est la vitesse minimale $v_{A,\text{min}}$ (exprimée en fonction de f, g, H et α) qu'il faut communiquer au point matériel M initialement placé en A pou qu'il puisse atteindre le point O.
Indication : Résoudre cet exercice en appliquant le **Th**$\mathcal{E}_k$:
- pour le mouvement de O vers A :

$$\Delta\mathcal{E}_{k,O\to A} = W_{O\to A}(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) \qquad \text{avec} \quad \Delta\mathcal{E}_{k,O\to A} = \mathcal{E}_{k,A} - \mathcal{E}_{k,O}$$

(Dans ce cas, que vaut la vitesse initiale en O ?)
- comme pour le mouvement de A et O :

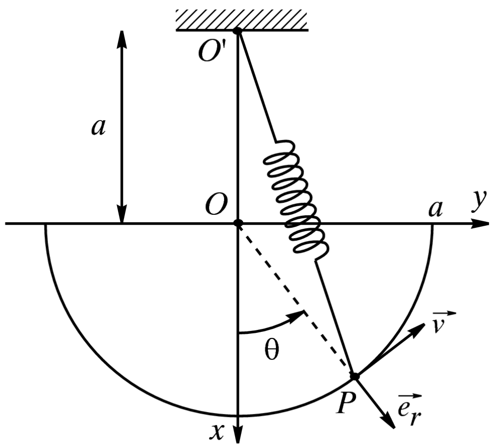
$$\Delta\mathcal{E}_{k,A\to O} = W_{A\to O}(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) \qquad \text{avec :} \quad \Delta\mathcal{E}_{k,A\to O} = \mathcal{E}_{k,O} - \mathcal{E}_{k,A}$$

(Dans ce cas, que vaut la vitesse finale en O lorsque $v_A = v_{A,\mathrm{min}}$?)

Rép : $v_{A,\mathrm{min}} = \sqrt{2gH(1 + f.\mathrm{cotan}\,\alpha)}$

Ex-M3.6 Force élastique / stabilité d'un équilibre

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ de repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Une perle quasi ponctuelle P, de masse M est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a. Le point P est attaché à un ressort $(k,\ l_0)$ dont l'autre extrémité est fixée en O' ($OO' = a$). le point P est repéré par l'angle $\theta = (Ox, OP)$.



1) a) Exprimer $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de a et θ dans la base polaire. En déduire l'expression du module $O'P$.

b) exprimer la tension $\overrightarrow{T}$ du ressort en fonction de a, k, l_0 et θ dans la base polaire.

2) a) Comment s'exprime la vitesse de P dans $\mathcal{R}_g$ dans la base polaire ?

b) On note $\overrightarrow{F}$ la résultante des forces exercées sur P. Donner l'expression de la puissance de cette résultante dans $\mathcal{R}_g$ en fonction de θ et $\dot{\theta}$.

En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ (à une constante près) dont dérive la résultante.

3) a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres : $a = \dfrac{2Mg}{k}$ et $l_0 = \sqrt{3}\left(a - \dfrac{Mg}{k}\right)$.

→ Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour θ positif ?

b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

c) Quelle est la période T des petites oscillations de P autour de la position d'équilibre stable ?

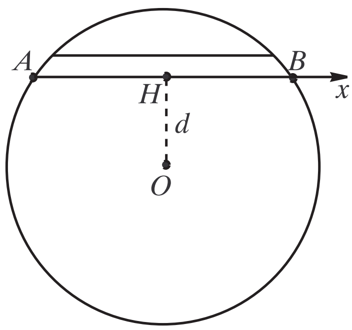
Rép : 3.a) $\mathcal{E}_p = Mga\left(\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ et chercher θ_e tel que $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)(\theta_e) = 0$;

3.c) Poser $\theta = \theta_e + \epsilon$ et montrer que ϵ vérifie $\ddot{\epsilon} + \omega^2\epsilon = 0$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, soit : $\epsilon(t) = \epsilon_m \cos(\ t + \varphi)$ avec $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$.

Ex-M3.7 Force de gravitation et tunnel terrestre

On démontre que pour tout point M de masse m situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r du centre O de la terre, l'attraction terrestre est une force agissant en ce point M dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$$\overrightarrow{F} = -mg_0\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$$



où R est le rayon de la Terre et $r = OM$. ($R = 6,4.10^6\ m$ et $g_0 = 10\ m.s^{-2}$.)

1) Quelle est l'énergie potentielle de M (en supposant que $\mathcal{E}_p = 0$ pour $r = 0$) ?

2) On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par O et traversant la Terre. On note d la distance OH du tunnel au centre de la Terre.

Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Il part du point A de la surface terrestre sans vitesse initiale.

→ Quelle est sa vitesse maximale v_m au cours du mouvement ? **A.N.** avec $d = 5.10^6\ m$.

→ Exprimer $\overline{HM} = x$ en fonction du temps t par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.

3) Représenter et commenter le graphe de $\mathcal{E}_p(x)$; $\mathcal{E}_p(x)$ étant l'énergie potentielle de gravitation de M. Décrire le mouvement de M à partir de sa position initiale en A.

Rép : 1) $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{mg_0}{R}r^2$; **2)** $v_m = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} = 5.10^3\ m.s^{-1}$ et $x(t) = -\sqrt{R^2 - d^2}\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$; $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{mg_0}{R}(d^2 + x^2) = ax^2 + b$ et $\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_{p,\max} = \mathcal{E}_p(A) = \mathcal{E}_p(B)$ ou encore $\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_{k,\max} + \mathcal{E}_{p,\min} = \mathcal{E}_m(H)$. Oscillations périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Ex-M3.8 Planeur :

Un planeur et son pilote (masse totale $m = 310\ kg$) volent à vitesse constante ($v_0 = 110\ km.h^{-1}$) en air calme.

1) Calculer le travail W_0 des forces de frottements lorsque le planeur descend de $2\,200\ m$ d'altitude à $700\ m$.

2) La finesse du planeur est de 38 (la finesse est le nombre de kilomètre(s) parcouru(s) horizontalement pour une perte d'altitude de 1 km en air calme). → Calculer l'intensité de la force de frottements $\overrightarrow{f}$.

On exposera clairement les hypothèses faites et les raisons de leurs choix.

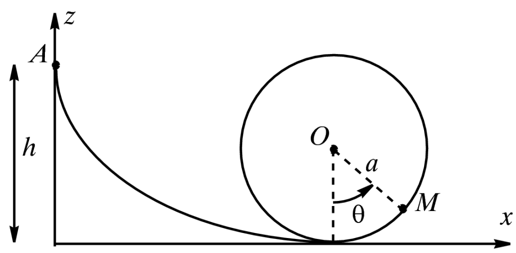
3) Dans une « pompe » (courant ascendant qui permet au planeur de prendre de l'altitude), le planeur monte de $700\ m$ à $2\,200\ m$ d'altitude. → En supposant que $W(\overrightarrow{f}) = W_0$, estimer le travail W_a fourni par les forces des courants ascendants au système {planeur+pilote}.

Rép : Corrigé complet sur le Blog ➜ Cf Blog

1) $W_0 = -4,6.10^6\ J$; **2)** $f \approx -80\ N$; **3)** $W_a = -2W_0 \approx -9,1.10^6\ J$.

Ex-M3.9 Toboggan

Un point matériel M se déplace sans frottements à l'intérieur d'une gouttière circulaire (toboggan terminé par un cercle de rayon a). Il est lâché en A, d'une hauteur h, sans vitesse initiale. On note g l'intensité du champ de pesanteur.



1) Exprimer en fonction de a, h, g et θ la norme v_M de la vitesse du point M lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.

2) De quelle hauteur h_{min} doit on lâcher le point matériel sans vitesse initiale en A pour qu'il arrive jusqu'au point le plus haut du demi-cercle ($\theta = \pi$).

3) Dans ces conditions, donner l'expression de la réaction du support au point I d'entrée du demi-cercle ($\theta = 0$).

4) Déterminer les limites h_1 et h_2 telles que :

a) si $h < h_1$, le point M effectue des oscillations.

b) si $h_1 < h < h_2$, M quitte la gouttière et chute pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

c) si $h > h_2$, le point M fait des tours complets (si le guide circulaire se poursuit).

Conseil : problème unidimensionnel + question sur la vitesse ⇒ utiliser le Thm de l'$\mathcal{E}_k$ entre A et M.

Rép : 1) $v_M = \sqrt{2g(h - a(1 - \cos\theta))}$; **2)** $h_{\text{min}} = \frac{5a}{2}$; **3)** $R_N(I) = 6mg$; **4)** $h_1 = a$ et $h_2 = h_{min} = \frac{5a}{2}$.

Ex-M3.10 Distance d'immobilisation d'une voiture sur autoroute

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de $v'_0 = 130\,km.h^{-1}$. On suppose qu'il y a des frottements solides entre la voiture et la route.

On rappelle qu'alors la réaction de la route se décompose en une composante normale $\overrightarrow{R_N}$ et une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ de sens opposé à la vitesse et dont la norme vérifie $R_T = f\,R_N$ en notant f le cœfficient de frottement.

Il faut $D' = 500\,m$ pour que le véhicule s'immobilise lorsqu'on n'exerce aucune force de freignage.

1) Calculer la distance de freinage D si la vitesse initiale était de $v_0 = 110\ km.h^{-1}$

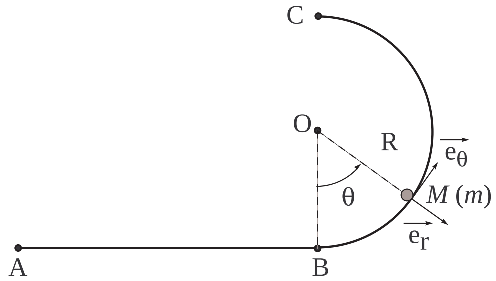
2) Le résultat est-il modifié si la route fait un angle α avec l'horizontale (la voiture montant ou descendant la pente) ?

Rép : 1) $D = \left(\dfrac{v_0}{v'_0}\right)^2 D' = 360\ m$; **2)** Le résultat est identique que la route soit horizontale ou non ! (Faire un schéma du plan incliné, exprimer R_N et R_T en fonction de m, g, α et f avant d'appliquer le Thm de l'$\mathcal{E}_k$).

Ex-M3.11 Vitesse minimale (*)

Un solide ponctuel de masse m est lancé en A sur une piste horizontale prolongée par un demi-cercle vertical de rayon R.

On donne : $AB = 1\ m$; $R = 1\ m$; $m = 0,5\ kg$; $g = 9,81\ m.s^{-2}$.



1) Les frottements étant négligeables, calculer en A la vitesse minimale $v_{A,\text{min}}$ que doit avoir la masse pour qu'elle atteigne le point C.

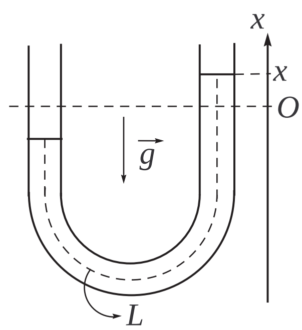
2) Même question lorsque les frottements entre l'objet et la piste sont assimilables à une force constante de norme $f = 1\ N$.

Rép : 1) $v_A \geq v_{A,\text{min}}$ avec $v_{A,\text{min}} = \sqrt{5gR} \simeq 7,1\ m.s^{-1}$ (Bien entendu, c'était la vitesse de M au point I dans la question **3)** de l'exercice **Ex-M3.9**) ;

2) $v_{A,\text{min}} = \sqrt{5gR + \dfrac{2f}{m}(AB + R\pi)} \simeq 8,2\ m.s^{-1}$.

Ex-M3.12 Oscillations dans un tube en U (**)

Dans un tube en U de section constante, on place un liquide de masse volumique μ occupant une longueur totale L.



Q : Montrer que si on écarte le liquide de sa position d'équilibre et qu'ensuite on le laisse évoluer librement, sans aucun phénomène dissipatif, le liquide effectuera des oscillations sinusoïdales de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{L}}$.

Ex-M3.13 Saut à l'élastique [P8/148]

Un homme de masse $m = 80\ kg$ saute à l'élastique d'un pont d'une hauteur $H = 112\ m$. Il est retenu par un élastique de raideur $k = 1\,000\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 80\ m$.

Il quitte le pont avec une vitesse négligeable. Les frottements sont négligés et le poids s'écrit $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_x}$ avec $g = 9,81\ m.s^{-2}$ (Attention : ici la verticale est descendante !)

Le mouvement comprend deux parties distinctes : l'une où la force de rappel élastique est absente (élastique non tendu), l'autre où elle est présente. **1)** Le système est-il conservatif ? Si oui, quelle est la valeur de son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ en prenant l'origine des énergies potentielles au point de départ ?

2) Déterminer v_1, la vitesse atteinte par la personne lorsque l'élastique commence à se tendre (quelle est alors la longueur du ressort et l'altitude x_1 correspondante ?).

3) Déterminer et calculer la longueur $l_{\text{éq}}$ de l'élastique à l'équilibre lorsque la personne est suspendue dans le vide. À ce stade, que dire de la sécurité de ce saut ?

4) Déterminer et calculer l'abscisse x_2 lorsque l'allongement de l'élastique est maximum. Conclusion ?

Rép : 3) $l_{\text{éq}} = 80,8\ m$; **4)** $x_2 = 92\ m$

Ex-M3.14 **Enroulement d'un pendule autour d'un clou** [P8/150]

Un pendule est constitué d'un fil de longueur constante l attaché à un point fixe A. À son extrémité est attaché un point matériel M de masse m. Son inclinaison par rapport à la verticale est notée α. On néglige tout frottement.

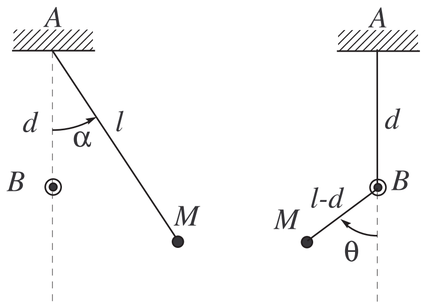
Un clou est fixé en B, sur la même verticale que A à la distance d de ce point. Lorsque le pendule entre en contact avec le clou, on suppose qu'aucun transfert énergétique ne se produit.

Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis la position $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Déterminer la condition sur d et l pour que le pendule s'enroule tout en restant tendu.

Indications : Le mouvement est circulaire mais présente deux phases :
- d'abord de centre A et de rayon l
- puis de centre B et de rayon $l - d$

L'absence de transfert énergétique lors du contact avec le clou implique que l'énergie cinétique (et donc la vitesse) varient continûment au cours du choc.

Rép : $d > \frac{3}{5}l$



Solution Ex-M3.13

L'énoncé suggère via l'expression du poids de paramétrer le mouvement suivant un axe Os selon la verticale descendante. Attention donc au signe de l'énergie potentielle de pesanteur !

1) Considérons l'homme de masse m supposé ponctuel dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ terrestre supposé galiléen. Son énergie mécanique est conservée au cours du mouvement puisque les forces qui s'exercent sont conservatives (le poids dans la première phase ou le poids et la force de rappel dans la seconde phase). Dans la première phase du mouvement :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgx_0 = 0}$$

en prenant l'origine des énergies potentielles au point de départ ($\dot{x}_0 = v_0 = 0$ à et $x_0 = 0$ à l'instant initial).

2) Lorsqu'il commence à se tendre, le ressort a pour longueur l_0 donc $x = l_0$. Donc à l'instant t_l, la vitesse vaut donc

$$\boxed{v_1 = \dot{x}(t_1) = \sqrt{2gl_0} = 39,6\ m.s^{-1}}$$

3) Le bilan des forces est modifiée puisque l'élastique est tendu il faut ajouter la tension de l'élastique $\overrightarrow{F_r} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$. L'équilibre des forces projeté sur l'axe Ox donne :

$$(m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{0}) \cdot \overrightarrow{e_x} \quad \Leftrightarrow \quad mg - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k} = 80,8\ m}$$

L'élastique est effectivement allongé à l'équilibre, ce qui est cohérent avec $l_{\text{éq}} > l_0$.

Numériquement, nous constatons que $l_{\text{éq}} < H$. Le saut paraît sans risque à ce stade de l'exercice.

4) Procédons comme aux questions 1-2, puisque le système est toujours conservatif. Son énergie mécanique est constante (nulle) et vaut à un instant quelconque ultérieur à t_1 :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = 0$$

L'élongation maximale de l'élastique, à l'instant t_2, est obtenue lorsque la vitesse de chute s'annule (le mouvement change de sens). Exprimons l'énergie mécanique à cet instant :

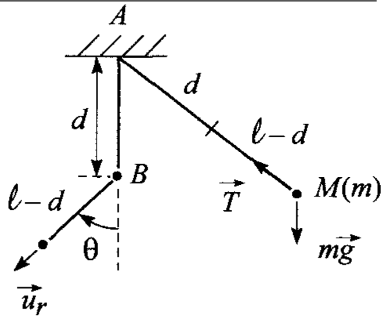
$$\mathcal{E}_m(t_2) = 0 = 0 - mgx(t_2) + \frac{1}{2}k(x(t_2) - l_0)^2$$

Cela conduit à un polynôme en $x(t_2)$ dont il ne faut retenir que la racine positive :

$$\boxed{x(t_2) = l_{\text{éq}} + \sqrt{l_{\text{éq}}^2 - l_0^2} = 92\ m}$$

Numériquement, $x(t_2) < H$: le saut est donc sans risque mais le frisson est garanti !

Solution Ex-M3.14



Le point M est soumis à la tension du fil et à son poids. Seul le poids travaille. Le fil reste tendu si la tension du fil ne s'annule pas.

Une fois le fil en contact avec le clou, le pendule décrit un cercle de centre B et de rayon $l - d$. La tension du fil s'exprime par $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$. La projection du PFD sur $\overrightarrow{u_r}$, s'écrit :

$$-\frac{mv^2}{l-d} = mg\cos(\theta) - T \quad \Rightarrow \quad T = mg\cos(\theta) + \frac{mv^2}{l-d}$$

Le fil reste tendu si $T > 0$ sur tout le mouvement. C'est pour $\cos(\theta) > 0$ que cette condition est la plus restrictive, donc pour $\theta = \pi$ (position verticale haute). La condition devient donc :

$$T = -mg + \frac{mv^2}{l-d} > 0$$

Utilisons le théorème de l'énergie cinétique entre la position initiale et la position verticale haute. Prenons l'altitude de la position initiale nulle. La position basse a pour altitude $-l$ et le diamètre de la trajectoire est $2(l-d)$ donc l'altitude de la position haute est :

$$-l + 2(l-d) = l - 2d$$

D'où le théorème :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mg(l - 2d - 0) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g(2d - l)$$

En combinant ces deux résultats, la condition devient :

$$T = \left(-1 + \frac{2(2d-l)}{l-d}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d > \frac{3}{5}l}$$