

## M2

## ■ Dynamique newtonienne

**Ex-M2.1** Cube superposés

Soit trois cubes (1), (2) et (3) posés l'un sur l'autre, l'ensemble reposant sur le sol (S). On note  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  l'action de (1) sur (2), par exemple.

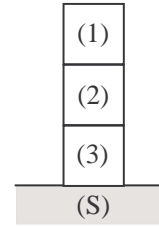
→ Calculer :  $F_{1 \rightarrow 2}$ ,  $F_{3 \rightarrow 2}$  et  $F_{S \rightarrow 3}$ .

**Données :**  $m_1 = 100 \text{ g}$ ;  $m_2 = 200 \text{ g}$ ;  $m_3 = 400 \text{ g}$ ;  $g = 10,0 \text{ m.s}^{-2}$ .

**Rép. :**  $F_{1 \rightarrow 2} = m_1 g = 1,0 \text{ N}$ ;  $F_{3 \rightarrow 2} = (m_1 + m_2) g = 3,0 \text{ N}$

$F_{S \rightarrow 3} = (m_1 + m_2 + m_3) g = 7,0 \text{ N}$ .

**Rq :** Les expressions littérales peuvent sembler intuitives : mais, ici, on doit les établir par un *raisonnement* (élémentaire, certes, mais raisonnement quand même !)

**Ex-M2.2** Coefficient de frottement

Une bille de masse  $m = 120 \text{ g}$  tombe dans un fluide. On a enregistré sa vitesse (norme)  $v$  en fonction du temps.

1) Quelles sont les différentes phases du mouvement ?

2) Donner une valeur approximative du temps caractéristique  $\tau$  de ce mouvement.

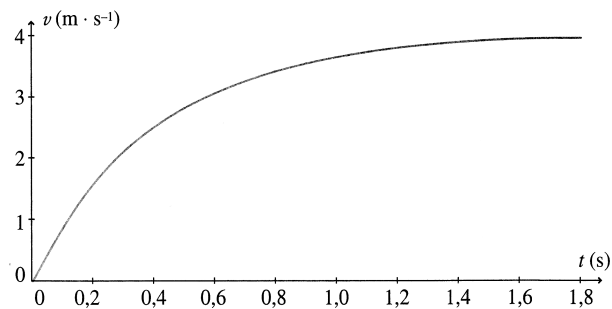
3) Quelle est la valeur limite de  $v$  (notée  $v_{lim}$ ) ?

4) En négligeant la poussée d'ARCHIMÈDE et en prenant  $\vec{f} = -k\vec{v}$  ( $k > 0$ ) comme force de frottement, établir l'équation différentielle satisfaite par  $v$ .

5) En déduire l'expression de  $v_{lim}$  en fonction de  $m$ ,  $k$  et  $g$ .

6) Calculer la valeur de  $k$ .

**Rép :** 2)  $\tau \approx 0,4 \text{ s}$  (cf. méthode de la tangente); 4/5) cf. COURS; 6)  $k \approx 0,29 \text{ kg.s}^{-1}$  (attention aux unités !; cf. Cours).

**Ex-M2.3** Profondeur d'un puits

Pour mesurer la profondeur d'un puits, Mimir laisse tomber une pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est  $\Delta t = 2,6 \text{ s}$ . → Calculer la profondeur  $h$  du puits.

On négligera les frottements de l'air sur la pierre et l'équation en  $h$  sera résolue numériquement.

**Données :**  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ; célérité du son dans l'air :  $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ .

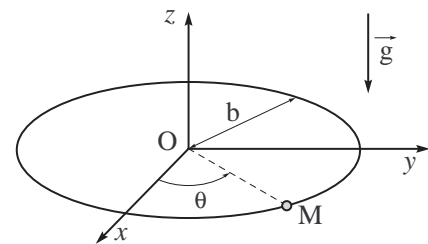
**Rép :**  $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c}$ ; d'où :  $h \approx 31 \text{ m}$ .

**Ex-M2.4** Anneau glissant sur un cercle

Un anneau ponctuel  $M$  de masse  $m$  est enfilé sur un cercle fixe de centre  $O$  et de rayon  $b$  placé horizontalement dans le plan ( $Oxy$ ).

À l'instant  $t = 0$ , une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  tangente au cercle est communiquée à l'anneau qui glisse alors sans frottement le long du guide.

→ Déterminer les composantes de la réaction  $\vec{R}$  du guide circulaire sur l'anneau.

**Ex-M2.5** Point soumis à une force centrale et à une force de frottement fluide

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplace sur un plan horizontal (on suppose la réaction du plan normale au plan).  $M$  est lancé à partir de  $M_0$ , de coordonnées cartésiennes  $(0, y_0)$  et est soumis à la force  $\vec{F} = -a\vec{OM}$  et à une force résistante  $\vec{f} = -b\vec{v}$  ( $a$  et  $b$  sont des constantes

positives).

- 1) Établir en coordonnées polaires, les équations différentielles du mouvement de  $M$ .
- 2) Dans le cas où  $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$ , déterminer  $\omega$  et l'expression de  $r$  en fonction du temps.

**Rép : 1)** Système ? référentiel ? bilan des forces ? projeter le **P.F.D.** dans la base cylindrique ;

2)  $r(t) = y_0 \exp\left(-\frac{bt}{2m}\right)$  et  $\omega = \sqrt{\frac{a}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ .

### Ex-M2.6 Chute libre d'une tige

Une tige rectiligne  $AB$  verticale de longueur  $l = 80 \text{ cm}$ , lâchée avec une vitesse initiale nulle, tombe en chute libre dans le vide. Elle passe au cours de sa chute par un trou ménagé dans une plaque horizontale de faible épaisseur. Quand son extrémité inférieure  $A$  atteint le trou, sa vitesse est  $v = 5 \text{ m.s}^{-1}$ .

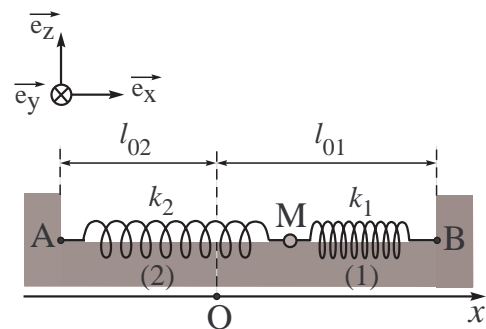
- 1) À quelle distance  $h$  de la plaque se trouvait initialement le point  $A$  ?
- 2) Quelle est la vitesse  $v'$  de la tige lorsque son extrémité supérieure  $B$  sort du même trou ?
- 3) Quelle est la durée  $T$  du passage de la tige à travers le trou ?

**Rép : 1)**  $h = 1,25 \text{ m}$ ; **2)**  $v' = 6,4 \text{ m.s}^{-1}$ ; **3)**  $T = 0,14 \text{ s}$ .

### Ex-M2.7 Point matériel reliés entre deux ressorts horizontaux

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est attaché à deux ressort (1) et (2) horizontaux de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , et de longueurs à vide  $l_{01}$  et  $l_{02}$  reliés à deux points fixes  $A$  et  $B$  distants de  $(l_{01} + l_{02})$ .

Le point  $M$  glisse sans frottement le long de l'axe ( $Ox$ ) à partir de sa position d'équilibre. Il est repéré sur cet axe par son abscisse  $x = \overline{OM}$ .



- 1) Justifier la position d'équilibre en  $O$  du point  $M$ .
- 2) Établir l'équation différentielle du mouvement de  $M$ . En déduire la période  $T$  des oscillations et la raideur  $k$  du ressort équivalent à cette association.
- 3) À l'instant  $t = 0$ , le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$ . Déterminer l'équation horaire du mouvement  $x(t)$ .

**Rép : 2)**  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$ ; **3)**  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ .

### Ex-M2.8 Le peintre et la poulie

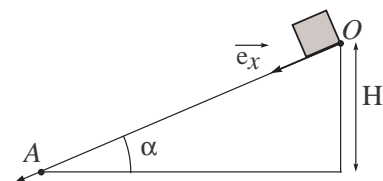
Un peintre en bâtiment de masse  $M = 90 \text{ kg}$  est assis sur une chaise le long d'un mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force de  $680 \text{ N}$ . la masse de la chaise est  $m = 15 \text{ kg}$ . On travaille avec la verticale ( $Oz$ ) ascendante.

- 1) Déterminer l'accélération  $\vec{a} = a, \vec{e}_z$  du peintre et de la chaise. Commenter son signe.
- 2) Quelle force  $\vec{F} = F, \vec{e}_z$  le peintre exerce-t-il sur la chaise ?

**Rép : 1)**  $a = 3,15 \text{ m.s}^{-2}$ ; **2)**  $F \simeq -486 \text{ N}$ .

### Ex-M2.9 Glissement d'un solide sur un plan incliné

Un solide supposé ponctuel de masse  $m$  est déposé à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente  $Ox$  d'un plan incliné d'angle  $\alpha$ , sans vitesse initiale. On note  $H$  la distance de ce point initial  $O$  au plan horizontal et  $g$  l'intensité du champ de pesanteur.



#### 1) Absence de frottement

- Déterminer l'accélération du mobile à l'instant  $t$ , lorsque les frottements de glissement sont négligés.

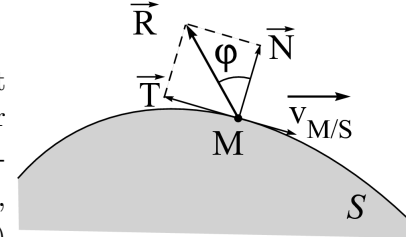
- En déduire la vitesse du mobile au point  $A$ .

## 2) Existence de frottement de glissement → Cf Complément de Cours ci-après !

- Quelle est la condition sur  $f$ , le coefficient de frottement pour que le solide commence à glisser à  $t = 0$  ?
- Reprendre les questions de la partie 1.

### Rappel et Compléments du cours Force de frottement solide, réaction du support

Lors du contact entre deux solides, donc lors du contact entre un point matériel  $M$  ( $m$ ) et un solide  $\mathcal{S}$ , ce dernier exerce sur le point  $M$  une force  $\vec{R}$  appelée réaction, composée d'une réaction normale (à la surface de contact)  $\vec{N}$ , et d'une réaction tangentielle  $\vec{T}$  (dite force de frottement) vérifiant **Les lois de Coulomb** :



- S'il y a glissement de  $M$  sur  $\mathcal{S}$  :  $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$  où  $f$  est le *coefficient de frottement*<sup>a</sup>
- S'il n'y a pas de glissement de  $M$  sur  $\mathcal{S}$  ( $\vec{v}_{M/S} = \vec{0}$ ) :  $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ .

#### Remarques :

- En posant  $\vec{N} \equiv N \vec{u}$  ( $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé de  $\mathcal{S}$  vers  $M$ , perpendiculaire à la surface de contact) : le contact se maintient si  $N > 0$  et le contact cesse si  $N = 0$ .
- En l'absence de frottement ( $f = 0$ ), la réaction du solide  $\mathcal{S}$  est normale, c'est-à-dire  $\vec{R} = \vec{N}$  ; elle reste donc à chaque instant perpendiculaire au support.

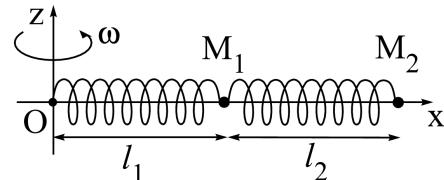
<sup>a</sup>. Le coefficient de frottement  $f$  dépend des matériaux en contact mais pas de la surface de contact. Par exemple  $f = 0,6$  pour le contact caoutchouc / bitume

### Ex-M2.10 Points matériels en rotation

Un système de deux particules identiques  $M_1$  et  $M_2$  (de masse  $m$ ) peut coulisser sans frottement sur un axe rigide horizontal  $Ox$ .  $M_1$  est lié à  $O$ , et  $M_2$  est lié à  $M_1$  par deux ressorts identiques de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .

L'axe  $Ox$  tourne autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . On pose  $K \equiv \frac{k}{m\omega^2}$ .

→ Trouver les deux équations du mouvement liant  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_0$  et  $K$ .



**Conseil** : Appeler  $(Ox_0y_0z_0)$  le repère cartésien du référentiel terrestre. Faire une vue de dessus pour une position quelconque de la tige. faire apparaître l'angle orienté  $\theta$  entre l'axe (fixe) des abscisses  $(Ox_0)$  et la tige  $(Ox)$ . Faire apparaître la base locale adaptées à l'étude de  $M_1$  et de  $M_2$ .

**Rép** :  $\ddot{l}_1 + \omega^2(K - 1)l_1 = \omega^2 Kl_2$  et  $\ddot{l}_2 + \omega^2(2K - 1)l_2 = \omega^2 K(l_1 + l_0)$

### Ex-M2.11 fil élastique lesté

Un ressort de masse négligeable, de raideur  $k$  et de longueur au repos  $l_0$ , est fixé par ses extrémités en deux points  $A$  et  $B$  de même altitude et distants de  $d$ . Il est lesté en son milieu par un objet quasi ponctuel  $M$  de masse  $m$ .

→ Caractériser la position d'équilibre (par exemple  $\theta$ , angle que font les forces de rappel  $\vec{T}_A$  et  $\vec{T}_B$  des deux parties du ressort sur  $M$  avec l'horizontale).

**Données** :  $m = 2,0 \text{ kg}$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $k = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$  ;  $l_0 = 1,0 \text{ m}$  ;  $d = 80 \text{ cm}$ .

**Rappel du cours M2** : En plaçant  $M$  au milieu du ressort  $[AB]$  ( $k, l_0$ ), on sait qu'on peut le remplacer par un ressort  $[AM]$   $\{k_A = k_0, l_{A0} = \frac{l_0}{2}\}$  en série avec un ressort  $[MB]$   $\{k_B = k_0, l_{B0} = \frac{l_0}{2}\}$  tel que  $k_0$  s'exprime facilement en fonction de  $k$ .

► **Solution :** Faire un schéma précis avec des notations claires après avoir lu l'énoncé. Y faire apparaître les trois forces qui s'exercent sur  $M$  à l'équilibre.

Projeter le **P.F.D.** à l'équilibre dans le repère  $(Oxz)$  où  $(Ox)$  est l'horizontale,  $Oz$  la verticale ascendante et  $O$  milieu de  $[AB]$ .

En déduire que les deux moitiés de ressort exercent des tensions identiques d'intensité  $T_A = T_B = \frac{mg}{2 \sin \theta}$ .

Que vaut la constante de raideur d'un ressort de longueur à vide la moitié de celle d'un ressort de raideur  $k$  ?

En déduire que :  $\frac{mg}{2k} = |d \tan \theta - l_0 \sin \theta|$ .

Si on fait l'hypothèse des petits angles :

$\theta \approx \frac{mg}{2k|d - l_0|}$ . Les données de l'énoncé donnent alors  $0,49 \text{ rad} = 28^\circ$ , qui n'est pas un petit angle  $\rightarrow$  il faut donc résoudre numériquement la première expression.

On trouve  $\theta \approx 0,79 \text{ rad}$ .

### Ex-M2.12 Point sur une tige en rotation uniforme dans

$\mathcal{R}_T$

Une tige  $OP$  rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante  $\omega$ . Cette tige forme un angle constant  $\alpha$  avec l'axe vertical  $(Oz) = (\Delta)$ .

Un point matériel de masse  $m$  pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

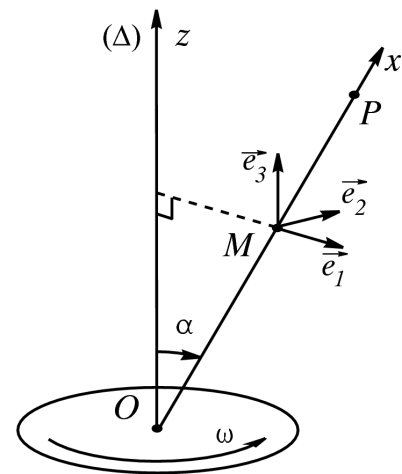
En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- 1) préciser la position  $x_e$  de l'équilibre relatif ;
- 2) donner les composantes  $R_1, R_2$  et  $R_3$  de la réaction  $\vec{R}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  liée à la tige.

**Conseil :** Reconnaître la nature de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  avant toute autre chose.

**Rép :**

$$1) x_e = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}; \quad 2) R_1 = -\frac{mg \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad R_2 = 0 \quad R_3 = mg$$



### Ex-M2.13 Tir balistique sans frottement

Un obus sphérique de masse  $m$  assimilé à un point matériel  $M$  est lancé dans l'air avec une vitesse  $\vec{v}_0$  depuis le point  $O$ , origine du repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen.

La vitesse  $\vec{v}_0$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale  $Ox$  dans le plan  $Oxz$ . Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est supposé uniforme et  $Oz$  est la verticale ascendante du lieu. On néglige tout frottement.

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire.
- 2) Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle  $\alpha$  la flèche est-elle maximale ?
- 3) Déterminer la portée  $D$  (distance entre  $O$  et le point de chute sur le plan horizontal  $z = 0$ ). Pour quel angle  $\alpha$  la portée  $D$  est-elle maximale ?

Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

- 4) Comment choisir l'angle de tir  $\alpha$  pour que la trajectoire passe par un point A de coordonnées  $(x_A, y_A)$  ?

Définir la parabole de sûreté.

**Données :**  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ;  $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$ .

**Rép :** Cf. p.

### Ex-M2.14 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle à la vitesse

On reprend les données de l'exercice précédent en supposant, cette fois, que l'obus est soumis à une force de frottement (traduisant la résistance de l'air) du type :  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  en plus de son poids.

- 1) Déterminer les composantes  $(v_x(t); v_z(t))$  du vecteur vitesse  $\overrightarrow{v_{m/\mathcal{R}_g}} = \vec{v}$  à chaque instant.

- 2) Déterminer les composantes  $(x(t); y(t))$  du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  à chaque instant.
- 3) Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.
- 4) Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.
- 5) Montrer que la vitesse de l'obus tend vers une limite que l'on déterminera.
- 6) Tracer l'allure de la trajectoire.

**Données :**  $\alpha = 45^\circ$  ;  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $\lambda = 0,1 \text{ kg.s}^{-1}$ .

**Rép :** cf. p.

**Ex-M2.15** Cavité dans un ast ro ide [P4/104]

Soit un ast ro ide, de forme sphérique (centre  $C$ , rayon  $R$ ) qui présente une cavité cylindrique de petite section, de longueur  $A_1A_2 = L$  et de milieu  $O$ . Un point matériel de masse  $m$ , abandonné en  $A_1$ , à l'instant  $t = 0$  sans vitesse initiale, se déplace le long de la cavité.

On admet que ce point matériel situé en  $M$ , à l'instant  $t$ , tel que  $\overrightarrow{CM} = r \cdot \vec{e}_r$  ( $r = CM$ ), est soumis à l'action de la force gravitationnelle (de l'ast ro ide)  $f = -m \cdot g_0 \cdot \frac{r}{R} \cdot \vec{e}_r$ .

$g_0$  représente la norme du champ de gravitation à la surface de l'ast ro ide.

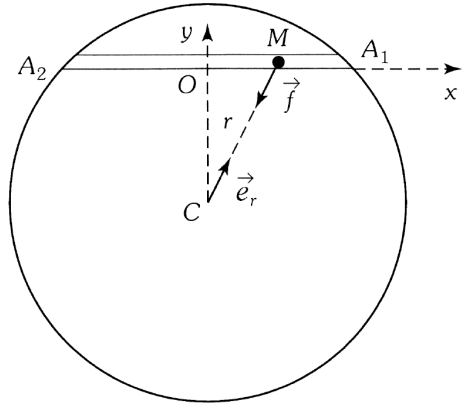
On note  $\vec{f}_1$  l'action du support  $A_1A_2$  sur le point matériel  $M$ .

On pose  $\overrightarrow{OM} = x$  et on néglige les frottements.

- 1)  tablir l'équation différentielle du mouvement du point matériel  $M$  dans le référentiel d'axe  $Ox$ , supposé galiléen.

Quelle est l'expression de  $x$  en fonction de  $t$  et des paramètres du système ? Quelle est l'expression de la réaction du support ?

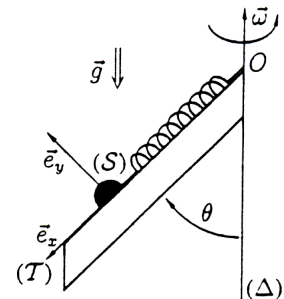
- 2) Déterminer la durée  $\tau$  du trajet  $A_1A_2$  et la vitesse maximale  $v_{\max}$  du point  $M$ .



**Ex-M2.16** Ressort sur un plan incliné [ENAC96 ; P8/132]

Un système est constitué d'une gliss re ( $\mathcal{T}$ ) soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical ( $\Delta$ ).

Sur la gliss re inclinée d'un angle  $\theta$  fixe par rapport à la verticale est posé un solide ( $\mathcal{S}$ ) de masse  $m$  qui peut glisser sans frottement sur ( $\mathcal{T}$ ). Ce solide que l'on peut considérer comme ponctuel, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$  dont l'autre extrémité est fixée au bâti.



- 1) Le système étant tout d'abord immobile, calculer la longueur  $l_{\text{ q}}$  du ressort à l'équilibre.
- 2) Le système est mis en rotation autour de l'axe vertical ( $\Delta$ ) avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  suffisamment faible pour que ( $\mathcal{S}$ ) reste en contact de ( $\mathcal{T}$ ).

a) Calculer les composantes dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  de l'accélération  $\overrightarrow{a_{M/R}}$  du solide ( $\mathcal{S}$ ) dans le référentiel fixe du laboratoire quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre  $l'_{\text{ q}}$ .

b) Exprimer  $l'_{\text{ q}}$ .

c) Déduisez-en la réaction  $\vec{R}$  de la gliss re sur ( $\mathcal{S}$ ).

- 3) La vitesse de rotation du solide est maintenant  $\omega_0$ . Elle est telle que le solide décolle juste de la gliss re quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre  $l''_{\text{ q}}$ .

Exprimer la nouvelle longueur à l'équilibre  $l''_{\text{ q}}$  et déduisez-en  $\omega_0$  en fonction de  $k, m, l_0$  et  $\theta$ .

**Rép :** 1)  $l_{\text{ q}} = l_0 + \frac{mg}{k} \cdot \cos \theta$  ; 2.a)  $\overrightarrow{a_{M/R}} = -l'_{\text{ q}} \cdot \omega^2 \cdot (\sin \theta \cdot \vec{e}_x + \cos \theta \cdot \vec{e}_y)$  ;

2.b)  $l'_{\text{ q}} = \frac{mg \cdot \cos \theta + k \cdot l_0}{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}$  ; 2.c)  $\vec{R} = mg \sin \theta \cdot (g - l'_{\text{ q}} \omega^2 \cdot \cos \theta) \cdot \vec{e}_y$  ; 3)  $l''_{\text{ q}} = \frac{g}{\omega^2 \cos \theta} = \frac{mg \cdot \cos \theta + k \cdot l_0}{k - m\omega_0^2 \sin^2 \theta}$  ;

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kg}{mg + kl_0 \cos \theta}}$$

**Solution Ex-M2.13**

1) • **Système étudié** : obus sphérique assimilé à un point matériel  $M$  ( $m$ ).

• **Référentiel d'étude** : le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen lié au repère d'espace ( $O$ ;  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ).

• **Le bilan des forces** appliquées au point  $M$  se réduit au seul poids  $\vec{P} \equiv m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ .

• Application du **P.F.D.** au point  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$  :

$$m\overline{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{g}$$

En simplifiant par  $m$  et en intégrant vectoriellement, on obtient :  $\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{K}$

$\vec{K}$  est une constante vectorielle qui s'obtient en considérant les **Conditions Initiales** ; or, à  $t = 0$ , on a  $\vec{v}(t=0) \equiv \vec{v}_0 = \vec{K}$ . Donc :  $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0}$

• Comme  $\vec{v} \equiv \left( \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g}$ , l'équation précédente peut s'intégrer à nouveau par rapport au temps :

$$\overline{OM}(t) = \vec{g} \frac{1}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{K}'$$

Où  $\vec{K}'$ , constante d'intégration vectorielle, s'obtient elle aussi grâce aux conditions initiales (à

$t = 0$ ) :  $\overline{OM}(t=0) = \vec{0} = \vec{K}'$ , soit :  $\boxed{\overline{OM}(t) = \vec{g} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t}$

• Cette équation vectorielle sur  $\overline{OM}(t) \equiv x(t)\vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z$  peut se projeter selon les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  :

◦ en projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient :  $x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$  ①

◦ en projetant selon  $\vec{e}_y$ , on obtient :  $y(t) = 0$

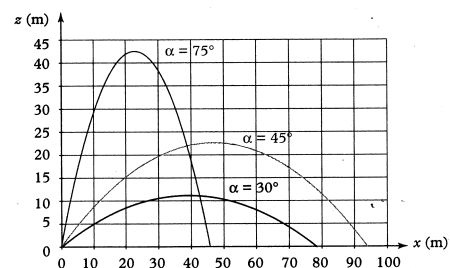
◦ en projetant selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :  $z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t$  ②

• L'équation de la trajectoire s'obtient j; en éliminant le temps  $t$  :

$$\textcircled{2} \xrightarrow{\textcircled{1}} z = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha} \quad \textcircled{3}$$

**Conclusion** : La trajectoire est une portion de parabole.

La figure ci-contre représente trois trajectoires obtenues pour différents angles  $\alpha$  ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $75^\circ$ ).



2) • La flèche est atteinte lorsque la vitesse verticale s'annule.

En projetant l'équation  $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$  sur  $\vec{e}_z$ ,

on obtient :  $v_z = -gt + v_0 \sin \alpha$  qui s'annule pour  $\boxed{t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}}$ .

• Ainsi la flèche de la trajectoire est le point  $F(x_F, z_F)$  dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant  $t$  par  $t_F$  dans les relations ① et ② :

$$\boxed{x_F = x(t_F) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}} \quad \textcircled{4} \quad \text{et} \quad \boxed{z_F = z(t_F) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}} \quad \textcircled{5}$$

3) • La portée est atteinte lorsque  $z = 0$  ; on obtient donc cette portée en cherchant la solution à l'équation suivante :

$$\textcircled{2} \xrightarrow{z=0} -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

- La solution  $x = 0$  est à écarter puisqu'elle correspond au point de départ du tir. La portée est donc la seconde solution :

$$D = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \equiv 2x_F \quad \textcircled{6}$$

- Pour que la portée soit maximale, il faut qu'elle soit solution de  $\left(\frac{dD}{d\alpha}\right) = 0$ , soit  $\cos(2\alpha) = 0$ , soit  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  (et pas autre chose puisque  $\alpha$  est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ); donc :

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad \Leftrightarrow \quad D = D_m = \frac{v_0^2}{g}$$

- **AN :**  $D_m = 91,7 \text{ m}$ ; et pour la valeur correspondante de  $\alpha$  ( $45^\circ$ ), on a  $z_F = 22,9 \text{ m}$  et  $x_F = 45,9 \text{ m}$  (cf. Graphique).

4) On veut atteindre  $A(x_A, z_A)$  en gardant  $\|\vec{v}(t=0)\| = v_0$  :  
 A doit donc appartenir à la trajectoire :  $z_A = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_A^2 + \tan \alpha x_A$

De plus, on sait que  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

d'où 
$$+\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x_A^2 - \tan \alpha x_A + z_A = 0$$

$$\frac{g x_A^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x_A \tan \alpha + \left(\frac{g x_A^2}{2v_0^2} + z_A\right) = 0 \quad (7)$$

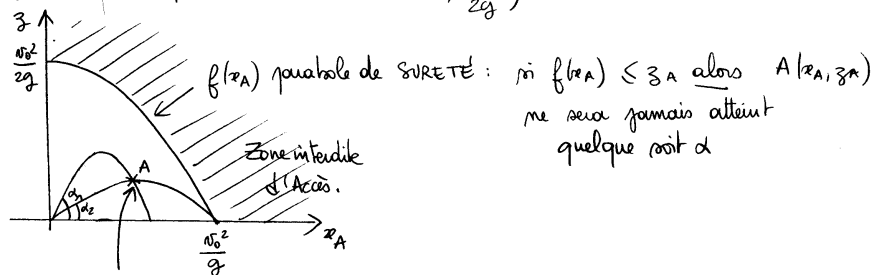
Eq du 2<sup>d</sup> degré en  $\tan \alpha$  de discriminant  $\Delta = x_A^2 - 4 \frac{g x_A^2}{2v_0^2} \left(\frac{g x_A^2}{2v_0^2} + z_A\right)$

Pour avoir une solution  $\tan \alpha$  réelle il faut  $\Delta \geq 0$  (8)

Soit  $1 - \frac{2g}{v_0^2} \left(z_A + \frac{g x_A^2}{2v_0^2}\right) \geq 0$  soit  $\frac{v_0^2}{2g} \geq z_A + \frac{g x_A^2}{2v_0^2}$

soit :  $-\frac{g x_A^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \geq z_A$  soit  $f(x_A) \geq z_A$

$f(x_A)$  est une parabole de sommet  $(0, \frac{v_0^2}{2g})$



Le point A est atteint lorsque (7) et (8) sont vérifiées, c'est-à-dire

pour  $\begin{cases} z_A < \frac{v_0^2}{2g} \\ \text{tang} \text{ solutio}^n \text{ de (7)} \end{cases}$   $\Delta = x_A^2 - \frac{g^2 x_A^4}{v_0^4} \left(1 + \frac{2v_0 z_A}{g x_A^2}\right)$

$$\tan \alpha = \frac{x_A \pm \sqrt{\Delta}}{2 \frac{g x_A^2}{v_0^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g x_A} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_A^2} - \left(1 + \frac{2v_0 z_A}{g x_A^2}\right)} \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$$

**Solution Ex-M2.14**

**1) • Système étudié :** obus sphérique assimilé à un point matériel  $M$  ( $m$ ).

• **Référentiel d'étude :** le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen lié au repère d'espace  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

• **Le bilan des forces** appliquées au point  $M$  se réduit au poids  $\vec{P} \equiv m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$  et à la force de frottement de l'air  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ .

• Application du **P.F.D.** au point  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$  :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{g} - \lambda\vec{v} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

• En définissant une constante temporelle  $\tau \equiv \frac{m}{\lambda}$ , l'équation différentielle sur  $\vec{v}$  devient :

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{A} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\vec{g}$$

•  $\vec{A}$  est une constante vectorielle d'intégration qu'on détermine grâce aux conditions initiale ( $t = 0$ ) : en effet, puisque  $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$ , on a :

$$\vec{v}_0 = \vec{A} + \tau\vec{g} \Rightarrow \vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \tau\vec{g}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\vec{g} \quad \textcircled{1}$$

• Pour déterminer les composantes ( $v_x(t); v_z(t)$ ) du vecteur vitesse, il suffit de projeter  $\textcircled{1}$  :

◦ en projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient :  $v_x(t) = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$   $\textcircled{2}$

◦ en projetant selon  $\vec{e}_y$ , on obtient :  $v_y(t) = 0$

◦ en projetant selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :  $v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g$   $\textcircled{3}$

**2)** Les composantes ( $x(t); y(t)$ ) du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  peuvent s'obtenir :

(a) en intégrant  $\textcircled{2}$  et  $\textcircled{3}$  par rapport au temps puis en appliquant les conditions initiales (**C.I.**)

(b) en intégrant directement l'équation vectorielle  $\textcircled{1}$ , en appliquant les CI, puis en projetant selon  $Ox$  et  $Oz$ .

Cette dernière méthode a l'avantage de ne passer que par un seul calcul de primitive. Ainsi, une primitive vectorielle de  $\textcircled{1}$  est :

$$\overrightarrow{OM}(t) = -\tau(\vec{v}_0 - \tau\vec{g}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\vec{g}.t + \vec{B}$$

Or, les **C.I.** imposent :  $\overrightarrow{OM}(t = 0) \equiv \vec{0} = -\tau(\vec{v}_0 - \tau\vec{g}) + \vec{B} \Leftrightarrow \vec{B} = \tau(\vec{v}_0 - \tau\vec{g})$

Soit :  $\overrightarrow{OM}(t) = -\tau(\vec{v}_0 - \tau\vec{g}) \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right) + \tau\vec{g}.t$

◦ en projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient :  $x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right)$   $\textcircled{4}$

◦ en projetant selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :  $z(t) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right) - \tau g.t$   $\textcircled{5}$

**3) •** La flèche  $F(x_F, z_F)$  de la trajectoire est obtenue au moment où la vitesse s'annule selon

$\vec{e}_z$ , soit lorsque :  $v_z - (t_F) = 0 \xrightarrow{\textcircled{3}} (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t_F}{\tau}\right) = \tau g$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_F}{\tau}\right) = \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} \quad \textcircled{6} \quad \Leftrightarrow t_F = \tau \ln\left(\frac{v_0 \sin \alpha + \tau g}{\tau g}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right) \quad \textcircled{7}$$



- En reportant ⑥ dans ④ et ⑤, on obtient les coordonnées de la « flèche » :

$$\textcircled{4} \xrightarrow{\textcircled{6}} x_F = x(t_F) = -\tau v_0 \cos \alpha \left( \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right)$$

Soit :  $x_F = \frac{\tau v_0^2 \sin(2\alpha)}{2(\tau g + v_0 \sin \alpha)}$       AN :  $x_F = 37,7 \text{ m}$

$$\textcircled{5} \xrightarrow{\textcircled{6}, \textcircled{7}} z_F = z(t_F) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) \left( \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right) - \tau^2 g \ln \left( 1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau g} \right)$$

Soit :  $z_F = \tau v_0 \sin \alpha - \tau^2 g \ln \left( 1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau g} \right)$       AN :  $z_F = 20,1 \text{ m}$

- **Rque** : On constate que l'abscisse  $x_F$  et l'altitude  $z_F$  de la flèche sont plus petites que dans le cas où il n'y a pas de frottement (cf. AN de **Ex-M2.13**) : cela est bien cohérent avec l'action d'une force de frottement ...

- 4) • Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , alors  $x(t) \rightarrow \tau v_0 \cos \alpha$ . Ce comportement correspond à l'existence d'une **asymptote verticale**.

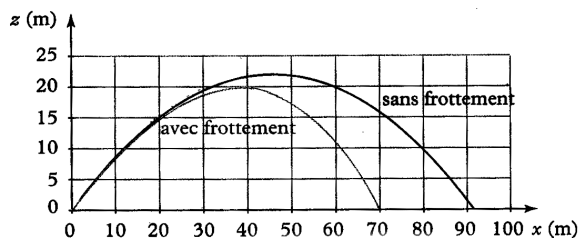
• AN :  $x_\infty = \tau v_0 \cos \alpha = 212,1 \text{ m}$ .

- 5) Il suffit de reprendre ① pour constater que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , alors  $\vec{v} \rightarrow \tau \vec{g}$  :

$$\vec{v}_\infty = \tau \vec{g} = \tau g \vec{e}_z \quad \text{AN : } v_\infty = \tau g = 98,1 \text{ m.s}^{-1}$$

- 6) Sur un dessin de trajectoire qui se limite aux altitudes positives :

- (a) on retrouve une flèche plus basse que dans le cas du tir balistique sans frottement,  
 (b) mais on ne perçoit pas l'asymptote verticale car celle-ci est atteinte pour une position  $x_\infty = 212,1 \text{ m}$  bien supérieure à la portée  $D$  de la trajectoire ( $D \simeq 70 \text{ m}$ ).



Si on prolongeait les courbes, on verrait apparaître l'asymptote  $x = 212,1 \text{ m}$  →

